完全マッチングに対する代数的アルゴリズム

2017年11月9日　17:23

$G=(V,E)$ … 単純無向グラフ $\left(\begin{array}{l} V=\{1,\cdots,n\} \\ |E|=m \end{array}\right)$

Def $M \subseteq E$ が G の完全マッチング (perfect matching)
$\overset{\text{def}}{\iff}$ M の枝は端点を共有せず、$2|M|=|V|$.

完全マッチングのアルゴリズム
Edmonds 1965 $O(n^2 m)$ 時間　グラフ理論的・難しい・複雑
⋮　(完全マッチングがあれば出力する)

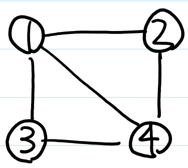
今日やるアルゴリズム　Lovász 1979 $O(n^3)$ 時間
乱択・線形代数的・シンプル
(ただし Edmonds と違って、完全マッチングがあるか判定するアルゴリズム)

新しい変数

Def (Tutte 行列)　$\mathbb{F}$: 体，T: $\mathbb{F}(x_e : e \in E)$ 上の $n \times n$ 行列

$$T_{ij} := \begin{cases} x_e & \text{if } e=ij \in E,\ i<j \\ -x_e & \text{if } \quad '' \quad ,\ i>j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例



$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & 0 & x_{24} \\ -x_{13} & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lovász のアルゴリズム

Input　G, $U \subseteq \mathbb{F}$: 有限集合
1: Tutte 行列の変数に対し，U から一様ランダムに値を代入して $\tilde{T} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ を得る.
2: if $\det \tilde{T} \neq 0$: return "YES"
3: else : return "NO"

Thm　$|\mathbb{F}| \geq |U| \geq n$ とする．Lovász のアルゴリズムは
G に完全マッチングがない $\Rightarrow$ "No" を返す
G に　〃　がある $\Rightarrow$ 確率 $\frac{1}{2}$ 以上で "YES" を返す.

Pfaffian

Def (Pfaffian)

$$\mathrm{pf}\,T := \sum a(M)$$

$a(M)$ は well-defined

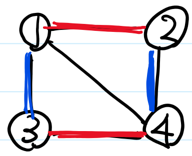
$$\mathrm{pf}\,T := \sum_{M:\,G\text{の完マ}} a(M)$$

a(M) は well-defined である (レポート).

ただし $M = \{i_1 j_1, \cdots, i_{n/2} j_{n/2}\}$ としたとき

$$a(M) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & & i_{n/2} & j_{n/2} \end{pmatrix} \prod_{ij \in M} T_{ij}$$

例　上のグラフにおいて完マは



$12, 34$ … $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} x_{12} x_{34} = x_{12} x_{34}$

$13, 24$ … $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix} x_{13} x_{24} = -x_{13} x_{24}$

$\therefore\ \mathrm{pf}\,T = x_{12} x_{34} - x_{13} x_{24}$

Prop　$\det T = (\mathrm{pf}\,T)^2$

例　上と同じグラフにおいて

$$\begin{aligned} \det T &= x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{13}^2 x_{24}^2 \\ &\quad - x_{12} x_{24} x_{13} x_{34} - x_{13} x_{12} x_{34} x_{24} \\ &= (x_{12} x_{34} - x_{13} x_{24})^2 \\ &= (\mathrm{pf}\,T)^2 \end{aligned}$$

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & 0 & x_{24} \\ -x_{13} & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(pf)　$\det T = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n T_{i\sigma(i)}$

各置換 σ に対し、有向グラフ $D_\sigma := (V, A_\sigma)$, $A_\sigma := \{i\sigma(i) : i = 1, \cdots, n\}$
を考えると、D_σ が奇数長の有向サイクルをもつものは消える.
以下では、D_σ が偶数長有向サイクルのみからなる σ だけ考える.

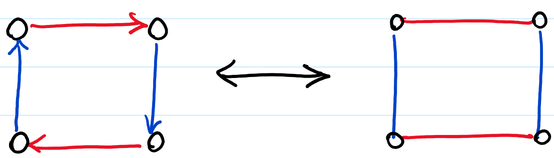
$$(\mathrm{pf}\,T)^2 = \left(\sum_M a(M)\right)^2 = \sum_{M,M'} a(M)a(M')$$

$$\det T = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n T_{i\sigma(i)}$$

実は
各項は 1:1対応する

- σ と完マの ordered pair (M, M') には 1:1対応がある.

(:) DECC



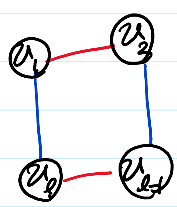
(M, M')

$\square$

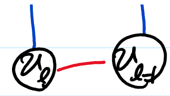
- $\sigma, (M, M')$: 上の 1:1対応する組

$\Rightarrow\ \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i T_{i\sigma(i)} = a(M)a(M')$

(:) $a(M)$の符号 $= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l-1 & l & \Big| & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{l-1} & v_l & \Big| & \end{pmatrix}$



$\because$ $a(M)$の符号 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{\ell-1} & v_\ell & \end{array}\right)$



$a(M')$ 〃 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \cdots \\ v_\ell & v_1 & \cdots & v_{\ell-2} & v_{\ell-1} & \end{array}\right) = \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} v_\ell & v_1 & \cdots & v_{\ell-2} & v_{\ell-1} & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \end{array}\right)$

$a(M)a(M')$の符号 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell \end{array} & \cdots \\ \underbrace{\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & \cdots & \ell & 1 \end{array}}_{\text{ここの符号は } (-1)^{\ell-1} = (-1)} & \end{array}\right)$

$= (-1)^{\#\text{cycle}} = \mathrm{sgn}(\sigma)$ $\square$

よって $(\mathrm{pf}\, T)^2 = \left(\sum_M a(M)\right)^2 = \sum_{M, M'} a(M)a(M')$

$= \sum_{\sigma : \mathrm{DECC}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} T_{i\sigma(i)} = \det T.$

$\square$

Cor Gが完マをもつ $\Longrightarrow$ $\det T \not\equiv 0$

Gが完マをもたない $\Longrightarrow$ $\det T \equiv 0$.

Schwartz-Zippel Lemma

$\det T$ は効率的に計算できるか??

$\longrightarrow$ No! (Tは文字を含む行列なので はきだし法は使えない)

Idea ランダムに値を入れて推定する

Lem (Schwartz-Zippel)

$p \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_m]$: 多項式, $p \not\equiv 0$

$U \subseteq \mathbb{F}$: 有限

$X_1, \cdots, X_m$: U上の i.i.d. 一様確率変数

$\Longrightarrow \Pr\left(p(X_1, \cdots, X_m) = 0\right) \leq \dfrac{\deg(p)}{|U|}$.

(pf) mに関する帰納法.

$m = 1$ のときは自明 (レポート問題)

$m-1$ まで正しいとする.

$$p(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=0} x_1^i p_i(x_2, \cdots, x_m)$$ とする

（ただし $p_\ell \neq 0$）.

A： $p(X_1, \cdots, X_m) = 0$ となる事象

B： $p_\ell(X_2, \cdots, X_m) = 0$ 〃 とすると、

帰納法の仮定より $\Pr(B) \leq \dfrac{\deg(p) - \ell}{|U|}$.

$\Pr(A | \overline{B}) \leq \dfrac{\ell}{|U|}$ （☺ $m=1$ のときを使う）

$$\therefore \Pr(A) = \Pr(A|B)\Pr(B) + \Pr(A|\overline{B})\Pr(\overline{B})$$
$$\leq 1 \cdot \frac{\deg(p)-\ell}{|U|} + \frac{\ell}{|U|} \cdot 1 = \frac{\deg(p)}{|U|} \qquad \square$$

（主定理の証明）

Cor. より G が完マをもたないときは 必ず "No" を返す.
一方，G が完マをもつときは $\deg(\mathrm{pf}\, T) \leq n/2$ より
Schwartz-Zippel Lemma より $\Pr(\text{"No"を返す}) \leq \dfrac{n/2}{|U|} \leq \dfrac{1}{2}$. $\square$

補足 Lovász のアルゴリズムは 存在判定 だが、
工夫すると 完全マッチングを求めるアルゴリズムにもできる。（レポート）