数理情報工学演習第二 B
Multiplicative Weight Update

数理第 7 研究室 相馬 輔

2019 年 10 月 11 日

以下の問題から 3 問以上を選んでレポートを提出すること．提出先: 計数事務室, **提出期限: 10 月 25 日 (金).** 講義ノート: `https://www.opt.mist.i.u-tokyo.ac.jp/~tasuku`

（☃の個数は難易度を表す）

■問題 1 (☃)　授業で使用した不等式

$$
\begin{aligned}
(1-\eta)^x &\leq 1-\eta x \quad (x \in [0,1], \eta \in (0,1)) \\
(1+\eta)^{-x} &\leq 1-\eta x \quad (x \in [-1,0], \eta > 0) \\
\log \frac{1}{1-\eta} &\leq \eta + \eta^2 \quad (\eta \in (0,1/2)) \\
\log(1+\eta) &\geq \eta - \eta^2 \quad (\eta \in (0,1/2))
\end{aligned}
$$

を証明せよ．

■問題 2 (anytime regret bound; ☃☃)　授業で紹介した MWU の解析では $\eta = \sqrt{\frac{\log n}{T}}$ としていたため，Player は T を知っている必要があった．T が既知の MWU をサブルーチンとして使用して，T が未知の場合でも期待リグレット $O(\sqrt{T \log n})$ を達成するアルゴリズムを設計せよ．

■問題 3 (first order regret bound; ☃)　MWU の解析を改善し，期待リグレット $O(\sqrt{L^* \log n})$ を達成するアルゴリズムを設計せよ．ここで，$L^* := \min_{i \in [n]} \sum_{t=1}^{T} |\ell_t(i)|$ で，簡単のため L^* は既知であるとしてよい．

■問題 4 (☃☃)　X_t $(t = 1, \ldots, T)$ を $\{-1, +1\}$ を等確率で取る i.i.d. 確率変数とする．

$$
\mathbf{E}\left[\left|\sum_{t=1}^{T} X_t\right|\right] \geq \Omega(\sqrt{T})
$$

を示せ．

■問題 5 (☃☃☃)　ここでは，一般の n に対してリグレット下界 $\Omega(\sqrt{T \log n})$ を証明する．$n = 2m$ (m は自然数) とし，$Y_t^{(i)}$ $(t = 1, \ldots, T,\ i = 1, \ldots, m)$ を $\{0, 1\}$ を等確率で取る i.i.d. 確率変数とする．損失関数 $\ell_t \in [0,1]^n$ を

$$
\ell_t = \begin{bmatrix} Y_t^{(1)} & 1 - Y_t^{(1)} & Y_t^{(2)} & 1 - Y_t^{(2)} & \ldots & Y_t^{(m)} & 1 - Y_t^{(m)} \end{bmatrix}^\top
$$

と定める $(t = 1, \ldots, T)$．ℓ_t はアルゴリズムを全く見ていないことに注意する．この ℓ_t に対する任意のアルゴリズムの期待リグレットは $\Omega(\sqrt{T \log n})$ 以上であることを証明せよ．

■問題 6 (☃)　線形計画の強双対性を用いて von Neumann の min-max 定理

$$
\max_{q \in \Delta_m} \min_{p \in \Delta_n} q^\top A p = \min_{p \in \Delta_n} \max_{q \in \Delta_m} q^\top A p
$$

を示せ．ここで A は $m \times n$ 行列，Δ_d は d 次元確率ベクトルの集合である．

■問題 7 (☃☃)　無向グラフ $G=(V,E)$ 中に 始点・終点対 (s_i,t_i) $(i=1,\dots,k)$ および枝容量 $c(e)>0$ $(e\in E)$ が与えられる．$\mathcal{P}$ を始点・終点対を結ぶパスの集合としたとき，**多品種流問題 (multicommodity flow)** とは以下のような線形計画問題である．

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{P\in\mathcal{P}} f(P)\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{P:e\in P} f(P)\le c(e)\quad (e\in E)\\ & f(P)\ge 0\quad (P\in\mathcal{P}).\end{aligned}$$

ここで $f(P)$ はパス P に沿って流れるフローの流量を表す．

これを MWU を用いて近似的に解くことを考えよう．まず，最適値を仮に γ として実行可能性問題

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{P}} f(P) &= \gamma\\ \sum_{P:e\in P} f(P) &\le c(e)\quad (e\in E)\\ f(P) &\ge 0\quad (P\in\mathcal{P})\end{aligned}$$

を解くことを考える（後で γ に関する二分探索をすればよい）．$K=\{f\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{P}} : \sum_{P\in\mathcal{P}} f(P)=\gamma\}$ とし，制約 $\sum_{P:e\in P} f(P)\le c(e)$ $(e\in E)$ を行列 A とベクトル b を用いて $Af\le b$ と書く．すると，上の実行可能性問題は「$f\in K$ で $Af\le b$ となるものがあるか？」という形になる．したがって，授業で紹介した LP に対する MWU 近似解法が使える．MWU 近似解法が効率的に動作するためには，以下の小問題を解く効率的なオラクルが必要である．

> Oracle(q)
>
> **Input:** 確率ベクトル $q\in\Delta_E$
>
> **Output:** もし $f\in K$ で
>
> $$\sum_{e\in E} q(e)\sum_{P:e\in P} f(P)\le\sum_{e\in E} q(e)c(e)$$
>
> を満たすものが存在すれば出力し，存在しなければ `Infeasible` を出力する．

上記のオラクルは，最短路問題を k 回解くことで実装できることを示せ．

参考文献

[1] 畑埜 晃平，瀧本 英二 『オンライン予測』 機械学習プロフェッショナルシリーズ，2016.

[2] S. Arora, E. Hazan, and S. Kale, "The multiplicative weights update method: a meta-algorithm and applications," *Theory of Computing*, vol. 8, pp. 121–164, 2012.

[3] N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi, *Prediction, Learning, and Games.* Cambridge University Press, 2006.