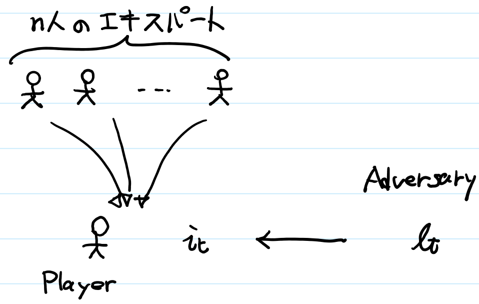
Mulitiplicative Weight Update

2019年10月4日　14:36

エキスパート予測問題



nんの エキスパート がいる.

$t=1,\cdots,T$ 日目 まで

- Player (あなた) は $i_t \in [n]$ を選び i_t さんの アドバイスに従う.
- その後、その日の損失 $\ell_t \in [-1,1]^n$ が分かり、損失 $\ell_t(i_t)$ を被る

$\boxed{\text{目標}}$ n人のうち最も損失の少ないエキスパートにくらべて"悪くない"よう i_t を選びたい.

Def (リグレット)

$$\mathrm{regret}(T) = \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \ell_t(i_t)}_{\text{Playerの累積損失}} - \underbrace{\min_{i\in[n]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t(i)}_{\text{最も良い固定expertの累積損失}}$$

Q. どのような $\ell_1,\cdots,\ell_T$ に対しても

$\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \leq o(T)$ となるような i_t の選び方 (アルゴリズム) はあるか?

(注) 毎回の損失は高々1 なので $O(T)$ は自明.

$\boxed{\text{仮定}}$ ℓ_t に確率分布などの法則性は何もなく, Adversary が意地悪にえらぶ.

正確には ① Adversary は Player のアルゴリズムを知っている.

ただし乱択アルゴリズムの場合、乱数までは知らない.

② ℓ_t は $i_1,\cdots,i_{t-1}$ に依存しても良い.

Prop $\forall$ 決定性アルゴリズム $\exists \ell_1,\cdots,\ell_T$ s.t. $\mathrm{regret}(T) \geq \frac{T}{2}$.

(pf) ある関数 $\mathcal{A}$ が存在し $i_t = \mathcal{A}(\ell_1,\cdots,\ell_{t-1})$ である.

$n=2$ とする. 口ス $\ell_t \in [-1,1]^2$ を

$$\ell_t(i) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = \mathcal{A}(\ell_1,\cdots,\ell_{t-1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i=1,2) \text{ とする.}$$

このとき, $\sum_{t=1}^{T} \ell_t(i_t) = T$, $\min\left\{\sum_{t=1}^{T}\ell_t(1), \sum_{t=1}^{T}\ell_t(2)\right\} \leq \frac{T}{2}$.

$\therefore \quad \mathrm{regret}(T) \geq T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$. $\square$

よって i_t は ランダムに選ばなければならない.

$p_t \in \Delta^n := \left\{ p \in [0,1]^n : \sum_i p(i) = 1 \right\}$ … i_t の分布を表すベクトル

すると

$$\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] = \sum_{t=1}^{T} \ell_t^{\top} p_t - \mathbb{E}\left[\min_{i\in[n]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t(i)\right].$$

すると
$$\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] = \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\top p_t - \mathbb{E}\left[\min_{i\in[n]} \sum_{t=1}^{T} \ell_t(i)\right].$$

p_t をいかに設計したら $o(T)$ にできるか??

乗算的重み更新 (multiplicative weight update : MWU)　$\eta \in (0, \frac{1}{2})$: パラメータ

$$W_0 = \mathbb{1} = [1, 1, \cdots, 1]^\top$$
$$W_t(i) := W_{t-1}(i) \cdot (1 - \eta \ell_t(i)) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

として"重み" W_t を定める.

分布 p_t は $p_t(i) := \dfrac{W_{t-1}(i)}{\sum_{i=1}^{n} W_{t-1}(i)}$ として定める.

Thm　MWU は $\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \leq \eta T + \dfrac{\log n}{\eta}$ をみたす.

特に $\eta = \sqrt{\dfrac{\log n}{T}}$ とすると $\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \leq 2\sqrt{T \log n}$.

(pf) ポテンシャル $\Phi_t := \sum_{i=1}^{n} W_t(i)$ を考える.

$$\begin{aligned}
\Phi_t &= \sum_{i=1}^{n} W_t(i) = \sum_{i=1}^{n} W_{t-1}(i)(1 - \eta \ell_t(i)) \\
&= \Phi_{t-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{W_{t-1}(i)}{\Phi_{t-1}} (1 - \eta \ell_t(i)) \\
&= \Phi_{t-1} \sum_{i=1}^{n} p_t(i)(1 - \eta \ell_t(i)) \\
&= \Phi_{t-1}\left(1 - \eta \sum_i \ell_t(i) p_t(i)\right) \\
&= \Phi_{t-1}(1 - \eta \ell_t^\top p_t) \\
&\leq \Phi_{t-1} \exp(-\eta \ell_t^\top p_t) \qquad (\because\ 1 + x \leq e^x)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \Phi_T \leq \Phi_0 \cdot \exp\left(-\eta \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\top p_t\right) = n \cdot \exp\left(-\eta \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\top p_t\right).$$

一方, $\forall i^* \in [n]$ に対し

$$\begin{aligned}
\Phi_T = \sum_i W_T(i) \geq W_T(i^*) &= \prod_{t=1}^{T} (1 - \eta \ell_t(i^*)) \\
&\geq (1 - \eta)^{\sum_{>0} \ell_t(i^*)} (1 + \eta)^{-\sum_{<0} \ell_t(i^*)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1-\eta)^x \leq 1 - \eta x & x \in [0, 1] \\ (1+\eta)^{-x} \leq 1 - \eta x & x \in [-1, 0] \end{array}}$$

ここで $\sum_{>0}$ は $\ell_t(i^*) > 0$ の t だけ和を取るという記号.

上2つを組合せて, 両辺の log を取ると

$$\sum_{>0} \ell_t(i^*) \log(1-\eta) - \sum_{<0} \ell_t(i^*) \log(1+\eta) \leq \log n - \eta \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\top p_t$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \eta \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\top p_t &\leq \log n - \sum_{>0} \ell_t(i^*) \log(1-\eta) + \sum_{<0} \ell_t(i^*) \log(1+\eta) \\
&= \log n + \sum_{>0} \ell_t(i^*) \log \frac{1}{1-\eta} + \sum_{<0} \ell_t(i^*) \log(1+\eta) \\
&\leq \log n + \sum_{>0} \ell_t(i^*)(\eta + \eta^2) + \sum_{<0} \ell_t(i^*)(\eta - \eta^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log \frac{1}{1-\eta} \leq \eta + \eta^2 \\ \log(1+\eta) \geq \eta - \eta^2 \end{array}}$$

$$\leq \log n + \sum_{>0} \ell_t(i^*)(\eta+\eta^2) + \sum_{<0} \ell_t(i^*)(\eta-\eta^2)$$ $\boxed{\log(1+\eta) \geq \eta-\eta^2}$

$$= \log n + \eta \sum_t \ell_t(i^*) + \eta^2 \sum_t |\ell_t(i^*)|$$

$$\therefore \sum_{t=1}^{T} \ell_t^T p_t - \sum_{t=1}^{T} \ell_t(i^*) \leq \frac{\log n}{\eta} + \eta \sum_t |\ell_t(i^*)| \leq \frac{\log n}{\eta} + \eta T. \quad \square$$

(注) $2\sqrt{T\log n}$ を達成するには $\eta = \sqrt{\frac{\log n}{T}}$ とする必要があるので

Player は T を知っている必要がある。実は T を知らなくても

$O(\sqrt{T\log n})$ を達成する方法がある。(レポート)

(注) $\ell_t \in [-1,1]$ でなく $\ell_t \in [-\rho, \rho]$ の場合は $\tilde{\ell}_t := \frac{1}{\rho}\ell_t$ に

MWU を実行すればよい。

$$\Rightarrow \mathbb{E}\, \mathrm{regret}(T) \leq 2\rho\sqrt{T\log n}.$$

(注) 最大化問題の場合は $g_t := -\ell_t$ を考えればよい。

リグレット下界

MWU で $O(\sqrt{T\log n})$ regret を達成できることは分かった。

もっと良くできるか? $\longrightarrow$ NO!

Thm $n=2$ のとき、$\forall$ アルゴリズム $\exists \ell_1, \cdots, \ell_T$ s.t. $\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \geq \Omega(\sqrt{T})$

(pf) ℓ_t を次のように決める。

$$\ell_t = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{X_t}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{ただし } X_t = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{w.p. } \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{i.i.d.}$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{w.p. } \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{w.p. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

ℓ_t は アルゴリズムをまったく見ていないことに注意。

したがって、$\forall p_1, \cdots, p_T$ に対して $\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \ell_t^T p_t\right] = \sum_{t=1}^{T} \frac{p_t(1)+p_t(2)}{2} = \frac{T}{2}$

一方、
$$\mathbb{E}\left[\min\left\{\sum_{t=1}^{T} p_t(1), \sum_{t=1}^{T} p_t(2)\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\min\left\{\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} X_t, \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} X_t\right\}\right]$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\min\left\{\sum_{t=1}^{T} X_t, -\sum_{t=1}^{T} X_t\right\}\right]$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{t=1}^{T} X_t\right|\right]$$

Lem $\mathbb{E}\left[\left|\sum_{t=1}^{T} X_t\right|\right] \geq \Omega(\sqrt{T})$ (レポート)

Lem $\mathbb{E}\left[\left|\sum_{t=1}^{T} X_t\right|\right] \geq \Omega(\sqrt{T})$ (レポート)

これより

$$\mathop{\mathbb{E}}_{f_1,\cdots,f_T}[\mathrm{regret}(T)] = \frac{T}{2} - \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_t X_t\right|\right]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_t X_t\right|\right] \geq \Omega(\sqrt{T}).$$

よって $\displaystyle \inf_{\text{アルゴ}} \sup_{f_1,\cdots,f_T} \mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \geq \inf_{\text{アルゴ}} \mathop{\mathbb{E}}_{f_1,\cdots,f_T}[\mathrm{regret}(T)] \geq \Omega(\sqrt{T}).$ □

(注) さらに工夫すると一般の n に対して $\mathbb{E}[\mathrm{regret}(T)] \geq \Omega(\sqrt{T\log n})$ も示せる.

(レポート)

MWUの応用① von Neumann's min max

Thm (von Neumann's min-max theorem)
行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して $\displaystyle \max_{q\in\Delta^m} \min_{p\in\Delta^n} q^T A p = \min_{p\in\Delta^n} \max_{q\in\Delta^m} q^T A p$

この定理はLPの強双対性を用いて証明できるが, MWUでも証明できる.

(pf) $\lambda_R :=$ 左辺, $\lambda_c :=$ 右辺 とおく.

[$\lambda_R \leq \lambda_c$]

$$\lambda_R = \max_q \min_p q^T A p \leq \max_q q^T A p' \qquad (^\forall p' \in \Delta^n)$$

$$\therefore \lambda_R \leq \min_{p'} \max_q q^T A p' = \lambda_c .$$

[$\lambda_R \geq \lambda_c$] 次のように l_t を定める:

$$l_t := A^T q_t \qquad \text{ただし} \quad q_t \in \mathop{\mathrm{argmax}}_q q^T A p_t \quad (t=1,\cdots,T)$$

$\bar{p} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t$ とおく. すると $^\forall q \in \Delta^m$ に対して

$$\begin{aligned}
q^T A \bar{p} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q^T A p_t \\
&\leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t^T A p_t && (q_t \text{ の定義}) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t^T p_t && (l_t \text{ の定義}) \\
&\leq \frac{1}{T}\left[\min_{i\in[n]} \sum_{t=1}^{T} l_t(i) + \mathbb{E}\,\mathrm{regret}(T)\right] \\
&\leq \frac{1}{T} \min_{p\in\Delta^n} \sum_{t=1}^{T} l_t^T p + \frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T} \\
&= \min \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t\right)^T A p + \frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T} && (l_t = q_t^T A)
\end{aligned}$$

$$= \min_{p\in\Delta^n} \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t\right)^T A p + \frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T} \qquad (\ell_t = q_t^T A)$$

$$\leq \max_{q\in\Delta^m} \min_{p\in\Delta^n} q^T A p + \frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T}.$$

よって $\underbrace{\min_{p\in\Delta^n} \max_{q\in\Delta^m} p^T A q}_{\lambda_C} \leq \max_{q\in\Delta^m} q^T A \bar{p} \leq \underbrace{\max_{q} \min_{p} q^T A p}_{\lambda_R} + \frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T}$

ここで MWU を使うと $\frac{\mathbb{E}\mathrm{regret}(T)}{T} \leq \frac{2\sqrt{\log n}}{\sqrt{T}} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$ □

(注) このアルゴリズムを実行するには、$p_t \mapsto q_t$ を計算するオラクルさえあれば良い。

② LP の近似ソルバー

$A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$: 多面体

(LP): $x \in K$ s.t. $Ax \leq b$ となるものはあるか?

$\boxed{\text{仮定}}$ $\forall p \in \Delta^n$ に対し $x \in K$ s.t. $p^T A x \leq p^T b$ が存在すれば x を返し、
存在しなければ "infeasible" を返すオラクルがある。

Thm $\rho := \max_{x\in P} \max_i |A_i x - b_i|$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $O\left(\frac{\rho^2}{\varepsilon^2}\log n\right)$ 回のオラクル呼出で

$\bar{x} \in K$ s.t. $A_i \bar{x} \leq b_i + \varepsilon$ $(\forall i)$ を出力するか, (LP) が実行不能であることを示すアルゴリズムが存在.

[アルゴリズム]

1: $T = 4\rho^2 \log n / \varepsilon^2$ とする.
2: for $t = 1, \cdots, T$:
3: $\quad p_t \leftarrow \mathrm{MWU}(\ell_1, \cdots, \ell_t)$
4: $\quad$ if ORACLE(p_t) = "No": return "infeasible"
5: $\quad$ else:
6: $\quad\quad x_t \leftarrow \mathrm{ORACLE}(p_t)$
7: $\quad\quad \ell_t \leftarrow A x_t - b$
8: $\bar{x} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$

(pf) "infeasible" の場合: $\exists p_t$ s.t. $p_t^T A x \leq p_t^T b$ が infeasible
なので元の $Ax \leq b$ も infeasible.

以下, $\bar{x}$ が出力された場合を考える.

$$\mathbb{E}\,\mathrm{regret}(T) = \sum_{t=1}^{T} \underbrace{(Ax_t - b)^T p_t} - \min_i \sum_{t=1}^{T} (A_i x_t - b_i) \leq 2\rho\sqrt{T\log n}$$

$$\mathbb{E}\,\mathrm{regret}(T) = \underbrace{\sum_{t=1}^{T}(Ax_t - b)^T p_t}_{\le 0} - \min_i \sum_{t=1}^{T}(A_i x_t - b_i) \le 2\rho\sqrt{T\log n}$$

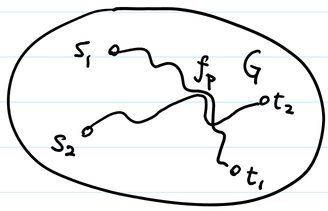
$$\therefore \quad \max_i \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(b_i - A_i x_t) = \max_i (b_i - A_i\bar{x}) \le 2\rho\sqrt{\frac{\log n}{T}} = \varepsilon \qquad \square$$

③ Multicommodity Flow の近似

$G=(V,E)$ … 無向グラフ， $c: E \to \mathbb{R}_+$ … 枝容量

$(s_1,t_1),\cdots,(s_k,t_k)$: source-sink pairs

$\mathcal{P} := \{P : G \text{ の } (s_i,t_i)\text{-path}\}$



Multicommodity Flow

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{P\in\mathcal{P}} f_P & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{P:\, e\in P} f_P \le c_e & (\forall e\in E) \\ & f_P \ge 0 & (\forall P\in\mathcal{P}) \end{array}$$

最適値を γ とし、γ で2分探索をすることにすれば以下のLP実行可能性問題を解けばよい:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{f: \mathcal{P}\to\mathbb{R}_+ \text{ で } \sum_{p\in\mathcal{P}} f_p = \gamma}_{K}, \ \underbrace{\sum_{p:\, e\in p} f_p \le c_e \ (\forall e\in E)}_{Af\le c} \\ \text{となるものはあるか？} \end{array}}$$

※ $\mathcal{P}$ は指数サイズあるのでこれを直接解くのは難しい。

上のように K, A, c を定めると、② の形をしている。

ORACLE(g):

$f: \mathcal{P}\to\mathbb{R}_+$ で $\sum_{p\in\mathcal{P}} f_p = \gamma$, $\sum_e g_e \sum_{p:\, e\in p} f_p \le \sum_e g_e c_e$

となるものがあれば出力、なければ "infeasible" を返す。

Prop ORACLE(g) は k 回の最短路問題に帰着できる。(レポート)