# 組合せ最適化特論

## 第２回（二部マッチング①）

担当: **相馬 輔**

2025/10/30

# 目次

# 目次

# 二部マッチング

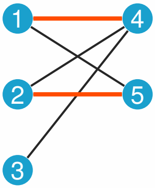
**重み付き二部マッチング問題**

**入力** $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み $w_e$ $(e \in E)$
**出力** $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング $M$

# 二部マッチング

### 重み付き二部マッチング問題

**入力** $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み $w_e$ $(e \in E)$
**出力** $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング $M$




### IP 定式化

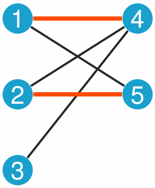
$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 \quad (i \in V) \\
& x_e \in \{0, 1\} \quad (e \in E)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & w^\top x \\
\text{s.t.} \quad & x_{14} + x_{15} && \le 1 \\
& x_{24} + x_{25} && \le 1 \\
& x_{34} && \le 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} && \le 1 \\
& x_{15} + x_{25} && \le 1 \\
& x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} && \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

# 二部マッチング

## 重み付き二部マッチング問題

**入力** $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み $w_e$ $(e \in E)$
**出力** $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大のマッチング $M$




## LP 定式化

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 & (i \in V) \\ & x_e \ge 0 & (e \in E) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{max} & w^\top x & \\ \text{s.t.} & x_{14} + x_{15} & \le 1 \\ & x_{24} + x_{25} & \le 1 \\ & x_{34} & \le 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} & \le 1 \\ & x_{15} + x_{25} & \le 1 \\ & x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} & \in \{0, 1\} \end{array}$$

係数行列の完全単模性により**常に** 0–1 の LP 最適解をもつ！

# 二部マッチング多面体

マッチング $M$ の**特性ベクトル (characteristic vector)** $\mathbf{1}_M \in \{0,1\}^E$ を次のように定める:

$$(\mathbf{1}_M)_e = \begin{cases} 1 & (e \in M) \\ 0 & (e \notin M) \end{cases}$$

※ $\chi_M$ と書く流儀もある

二部マッチング多面体: $P = \mathrm{conv}\{\mathbf{1}_M : M$ は $G$ のマッチング $\}$

**定理**

二部マッチング多面体は次の線形不等式系で表される.

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 1 \quad (i \in V)$$

$$x_e \geq 0 \quad (e \in E)$$

# 二部マッチングの双対問題

**主問題 (P)**

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{e\in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e\in\delta(i)} x_e \le 1 \quad (i \in V) \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

**双対問題 (D)**

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i\in V} y_i \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \ge w_e \quad (e = ij \in E) \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

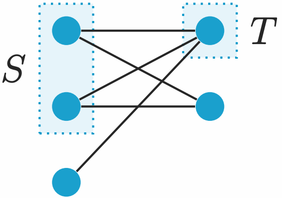
双対問題 (D) の係数行列も完全単模．よって，枝重み $w_e$ $(e \in E)$ が整数なら，(D) は整数最適解をもつ．

# Kőnig–Egerváry の定理

$G=(V^+,V^-;E)$ を $V^+,V^-$ を頂点集合とする二部グラフとする．

**定義**

$S\subseteq V^+, T\subseteq V^-$ が**頂点被覆**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の枝 $e=ij\in E$ に対し，$i\in S$ または $j\in T$.

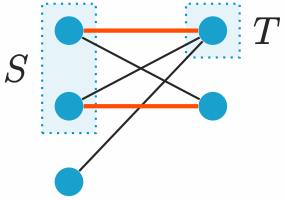


# Kőnig–Egerváry の定理

$G = (V^+, V^-; E)$ を $V^+, V^-$ を頂点集合とする二部グラフとする．

**定義**

$S \subseteq V^+, T \subseteq V^-$ が**頂点被覆**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の枝 $e = ij \in E$ に対し，$i \in S$ または $j \in T$.




**補題 (弱双対性)**

任意のマッチング $M$ と頂点被覆 $(S, T)$ に対し，$|M| \le |S| + |T|$.

**(証明)** $M$ は端点を共有しないので，$M$ を被覆するには少なくとも $|M|$ 個の頂点が必要． $\square$

# Kőnig–Egerváry の定理

先の LP において，$w \equiv 1$ の場合を考えると，整数性と強双対定理から以下の定理が得られる．

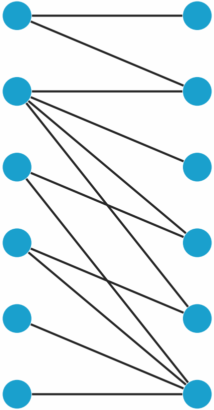
**定理 (Kőnig–Egerváry)**

二部グラフ $G$ において，次の最大最小定理が成り立つ．

$$\max_{M:\,\text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\,\text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

# 例

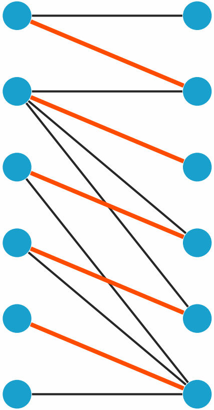
右の二部グラフにおいて，



# 例

右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$



# 例

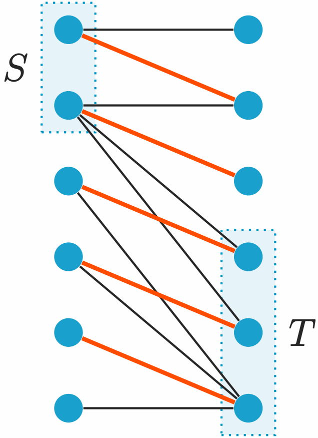
右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$
- 最小の頂点被覆は $|S| + |T| = 5$

一般に，二部グラフにおいてマッチング $M$ が最大であることを示すには，

$$|M| = |S| + |T|$$

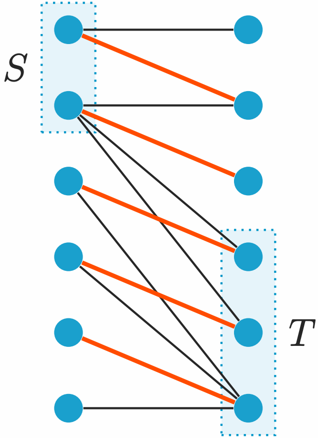
を満たす頂点被覆 $(S, T)$ を提示すれば良い．



# 例

右の二部グラフにおいて，

- 最大のマッチングは $|M| = 5$
- 最小の頂点被覆は $|S| + |T| = 5$




一般に，二部グラフにおいてマッチング $M$ が最大であることを示すには，

$$|M| = |S| + |T|$$

を満たす頂点被覆 $(S, T)$ を提示すれば良い．

そのような頂点被覆は，$M$ の最適性の証拠といえる（**良い特徴づけ; good characterization**）

# 目次

1. 二部マッチングの最大最小定理
   - LP の整数性（復習）
   - Kőnig–Egerváry の定理
2. 重みなし二部マッチング
   - 増加道アルゴリズム
   - Kőnig–Egerváry の定理再訪
3. 重み付き二部マッチング
   - 相補性条件
   - ハンガリー法

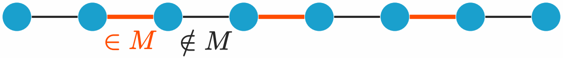
# 増加道

$M$: $G$ のマッチング

## 定義

パス $P$ が（$M$ に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. $P$ において $E \setminus M$ と $M$ の枝が交互に現れる．
2. $P$ の始点と終点は $M$ に接続していない頂点．




$|M| = 3$

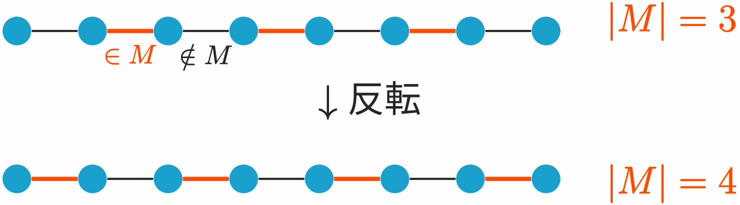
# 増加道

$M$: $G$ のマッチング

**定義**

パス $P$ が（$M$ に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1. $P$ において $E \setminus M$ と $M$ の枝が交互に現れる．
2. $P$ の始点と終点は $M$ に接続していない頂点．



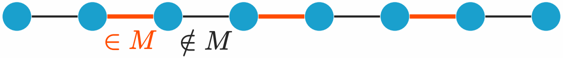
# 増加道

$M$: $G$ のマッチング

**定義**

パス $P$ が（$M$ に対する）**増加道** $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. $P$ において $E \setminus M$ と $M$ の枝が交互に現れる．
2. $P$ の始点と終点は $M$ に接続していない頂点．




$|M| = 3$

$\downarrow$ 反転

$|M| = 4$

$\therefore$ $M$ が最大マッチング $\Longrightarrow$ 増加道は存在しない

# 増加道

**補題**

$M$ が最大でない $\Longrightarrow$ 増加道が存在．

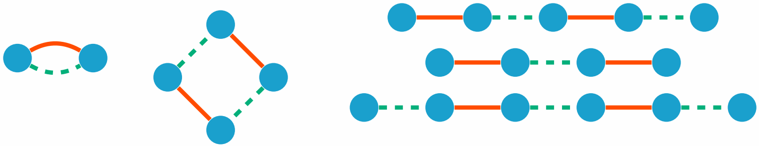
# 増加道

**補題**

$M$ が最大でない $\Longrightarrow$ 増加道が存在．

**証明**

2 つのマッチング $M$, $M'$ ($|M| < |M'|$) を取る．すると，$M + M'$ の連結成分は交互道と長さ偶数のサイクルからなる．



いま，$|M| < |M'|$ より，$M + M'$ の連結成分の中に，交互道で始点と終点が $M$ の端点でないものが存在する．これは $M$ に対する増加道．

□

# 増加道アルゴリズム

補題より，以下のようなアルゴリズムが考えられる．

**増加道アルゴリズム**

$M \leftarrow \emptyset$ とする．
**while** $M$ に対する増加道が存在する：
    増加道の 1 つを求めて $P$ とする．
    $P$ に沿って枝を反転して，より大きなマッチング $M$ を得る．
**return** $M$

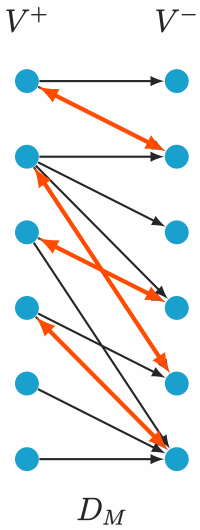
増加道 $P$ を $A$ 時間で求められれば，全体は $O(nA)$ 時間アルゴリズム．

# 有向グラフを用いた増加道探索

マッチング $M$ に対し，$G$ の枝を

- $M$ の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は $V^+$ から $V^-$ 向き

に向き付けた有向グラフを $D_M$ とする．



# 有向グラフを用いた増加道探索

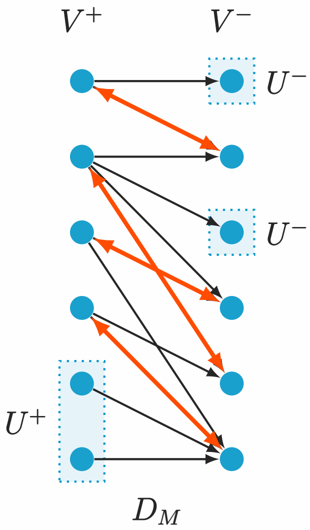
マッチング $M$ に対し，$G$ の枝を

- $M$ の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は $V^+$ から $V^-$ 向き

に向き付けた有向グラフを $D_M$ とする． また，

- $U^+ := M$ に接続していない $V^+$ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない $V^-$ の頂点集合

とする．



# 有向グラフを用いた増加道探索

マッチング $M$ に対し，$G$ の枝を

- $M$ の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は $V^+$ から $V^-$ 向き

に向き付けた有向グラフを $D_M$ とする． また，

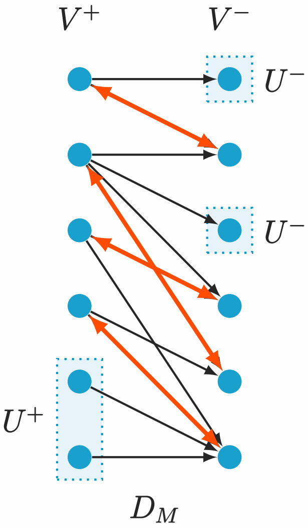
- $U^+ := M$ に接続していない $V^+$ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない $V^-$ の頂点集合

とする．

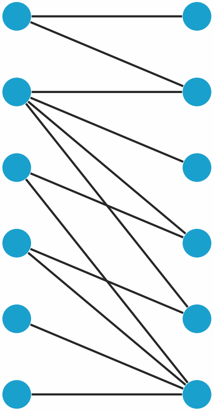
増加道 $\longleftrightarrow$ $D_M$ における $U^+$ から $U^-$ への有向パス

$\therefore$ 幅優先探索により $O(m)$ 時間で増加道が求められる

$(m = |E|)$

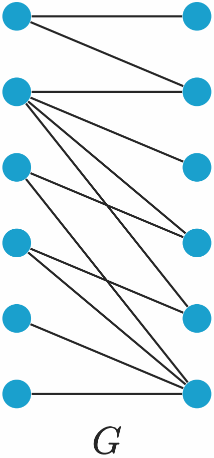


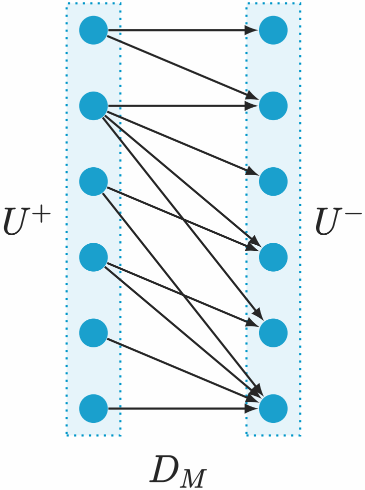
# 例



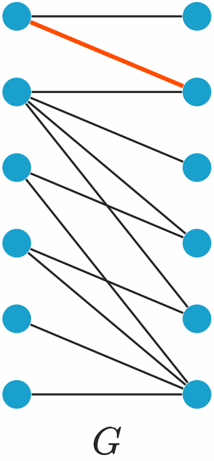
$G$

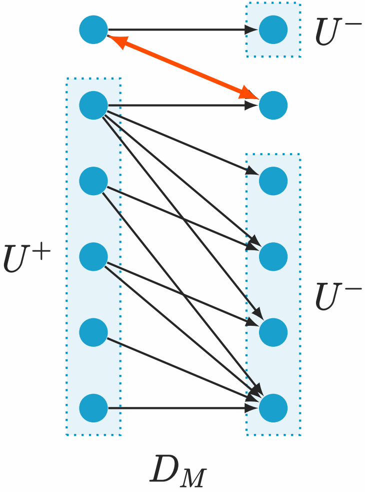
# 例



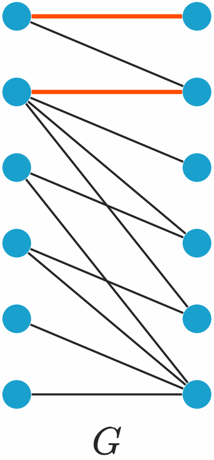



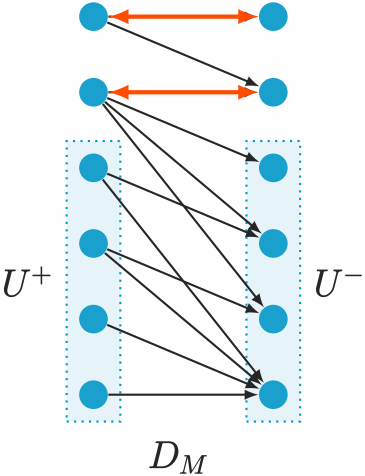
# 例



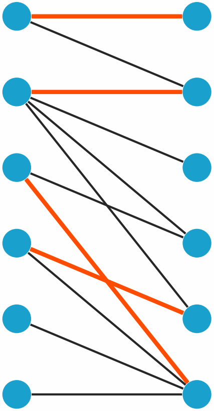



# 例

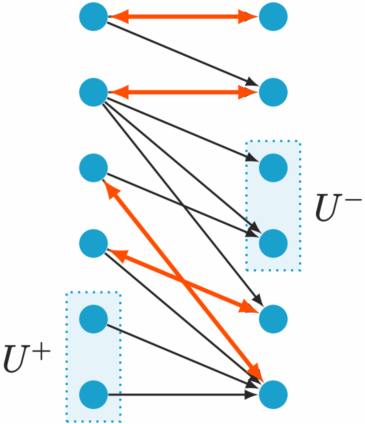


# 例

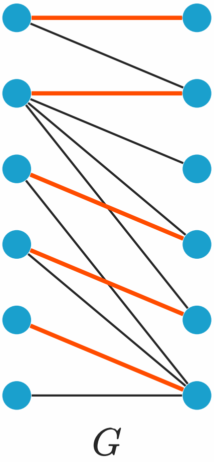


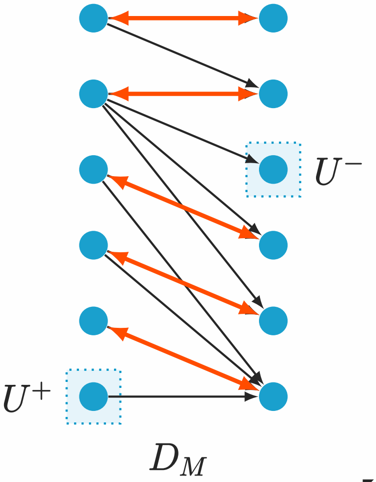
$G$




$D_M$

# 例




【終了】

# König–Egerváry の定理再訪

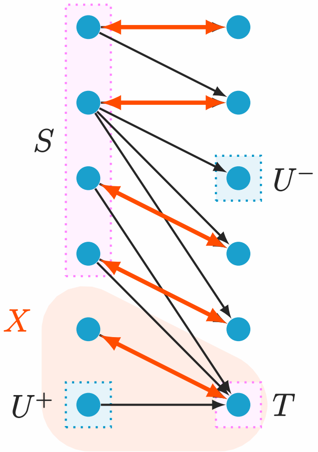
$$\max_{M:\text{ マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\text{ 頂点被覆}} |S| + |T|$$

**定理**

アルゴリズムが停止したときの $D_M$ において，$U^+$ から到達可能な頂点全体を $X$ とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，$(S,T)$ は最小頂点被覆．



# Kőnig–Egerváryの定理再訪

$$\max_{M:\ \text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\ \text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

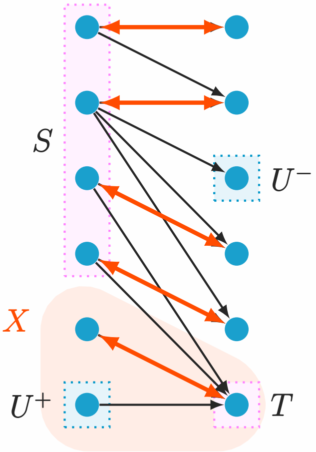
**定理**

アルゴリズムが停止したときの $D_M$ において，$U^+$ から到達可能な頂点全体を $X$ とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，$(S,T)$ は最小頂点被覆．

**(証明)** 全ての枝は右向きに進めるので，$(S,T)$ は定義から頂点被覆．また，増加道が存在しないので，$X \cap U^- = \emptyset$. ゆえに $(S,T)$ の全ての頂点は $M$ の枝を 1 本だけ被覆しているので，$|S| + |T| = |M|$. □



# Kőnig–Egerváry の定理再訪

$$\max_{M:\ \text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\ \text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

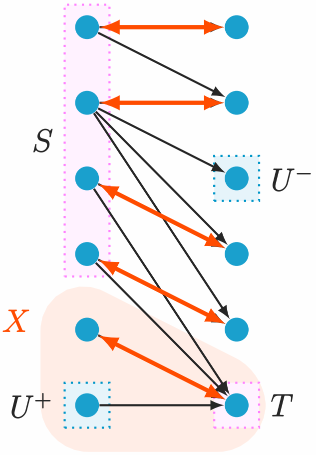
**定理**

アルゴリズムが停止したときの $D_M$ において，$U^+$ から到達可能な頂点全体を $X$ とする．このとき

$$S := V^+ \setminus X, \quad T := V^- \cap X$$

とすると，$(S,T)$ は最小頂点被覆．

**（証明）** 全ての枝は右向きに進めるので，$(S,T)$ は定義から頂点被覆．また，増加道が存在しないので，$X \cap U^- = \emptyset$. ゆえに $(S,T)$ の全ての頂点は $M$ の枝を 1 本だけ被覆しているので，$|S| + |T| = |M|$. □




Kőnig–Egerváry の定理の，LP を使わないアルゴリズム的証明が得られた．

# 重みなし二部マッチング（まとめ）

**定理**

二部グラフにおいて，

- 増加道アルゴリズムは最大マッチング $M$ を $O(mn)$ 時間で求める．
  $(m = |E|, n = |V|)$
- 同時に，$|M| = |S| + |T|$ を満たす最小頂点被覆 $(S, T)$ も求められる．

# 目次

1. **二部マッチングの最大最小定理**
    - LP の整数性（復習）
    - Kőnig–Egerváry の定理
2. **重みなし二部マッチング**
    - 増加道アルゴリズム
    - Kőnig–Egerváry の定理再訪
3. **重み付き二部マッチング**
    - 相補性条件
    - ハンガリー法

# 重み付き二部（完全）マッチング

マッチング $M$ が**完全** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての頂点が $M$ に接続 $\iff 2|M| = |V|$

**重み付き二部完全マッチング問題**

**入力** $G = (V; E)$: 二部グラフ ($|V^+| = |V^-| = n/2$)，枝重み $w_e$ ($e \in E$)
**出力** $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大の完全マッチング $M$

※ 以下，$G$ は少なくとも 1 つの完全マッチングを持つとする．

# 重み付き二部（完全）マッチング

マッチング $M$ が**完全** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての頂点が $M$ に接続 $\Longleftrightarrow$ $2|M| = |V|$

**重み付き二部完全マッチング問題**

**入力** $G = (V; E)$: 二部グラフ ($|V^+| = |V^-| = n/2$)，枝重み $w_e$ $(e \in E)$
**出力** $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最大の完全マッチング $M$

※ 以下，$G$ は少なくとも 1 つの完全マッチングを持つとする．

**主問題 (P)**

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題 (D)**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e = ij \in E) \end{aligned}$$

# 相補性条件

**補題 (相補性条件)**

$M \subseteq E$, $y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. $M$ は完全マッチング
2. $y$ は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

**主問題 (P)**

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題 (D)**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e \in E) \end{aligned}$$

# 相補性条件

**補題 (相補性条件)**

$M \subseteq E, y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. $M$ は完全マッチング
2. $y$ は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

以下，

- (D) の実行可能解を $w$ **被覆**
- ③を満たす枝を**タイトな枝**

という．

**主問題 (P)**

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題 (D)**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \geq w_e \quad (e \in E) \end{aligned}$$

# ハンガリー法

②③を満たすマッチング $M$ と $w$ 被覆 $y$ を保持し，①を満たすまで更新するアルゴリズム．

**定義**

$w$ 被覆 $y$ に対し，$G$ の部分グラフ $G_y = (V^+, V^-, E_y)$ を

$$E_y = \{e = ij \in E : y_i + y_j = w_e\}$$

と定める．つまり，$G_y$ は $y$ に関しタイトな枝のみ残したグラフ．

**補題**

$G_y$ に**完全**マッチングが存在すれば，それは最大重みマッチング．

**証明** 相補性条件！ □

# ハンガリー法

$G_y$ に完全マッチングが存在しなかったら？
$\longrightarrow y$ を更新し，(D) の目的関数値を改善できる．

# ハンガリー法

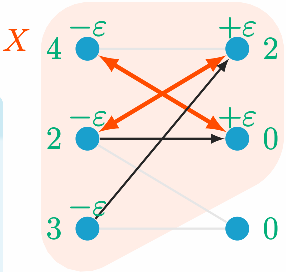
$G_y$ に完全マッチングが存在しなかったら？
$\longrightarrow y$ を更新し，(D) の目的関数値を改善できる．

**補題**

$D_M(y)$ を $G_y$ に対する重みなしマッチングで使う有向グラフとし，$D_M(y)$ における $U^+$ から到達可能な頂点全体を $X$ とする．
$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$ とする．$y'$ を

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすると，$y'$ は $w$ 被覆で，$y'(V) < y(V)$ を満たす．



# 補題の証明

$$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

## $y'$ が $w$ 被覆であること

- 制約 $y_i + y_j \geq w_e$ $(e = ij \in E)$ が更新後に破られる可能性があるのは，$i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ の場合のみ．
- $\varepsilon$ の定義より実行可能性は保たれる．

# 補題の証明

$$\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_e : e = ij \in E, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$$
$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in V^+ \cap X) \\ y_i + \varepsilon & (i \in V^- \cap X) \\ y_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

### $y'$ が $w$ 被覆であること

- 制約 $y_i + y_j \geq w_e$ $(e = ij \in E)$ が更新後に破られる可能性があるのは，$i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ の場合のみ．
- $\varepsilon$ の定義より実行可能性は保たれる．

### $y'(V) < y(V)$ であること

- $y'(V) = y(V) - \varepsilon(|V^+ \cap X| - |V^- \cap X|)$.
- いま，$G_y$ に完全マッチングが存在しないので，$|V^+ \setminus X| + |V^- \cap X| < n/2$.
$\longrightarrow |V^+ \cap X| - |V^- \cap X| > 0$.
- よって，$\varepsilon > 0$ を示せば良い．$X$ は $G_y$ の到達可能集合なので，任意の枝 $e = ij \in E$ s.t. $i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X$ はタイトでない．ゆえに $y_i + y_j - w_e > 0$ が成り立つ．

$\square$

# ハンガリー法

$y_i := \max_{e \in \delta(i)} w_e \ (i \in V^+)$, $y_j := 0 \ (j \in V^-)$ とする． // $y$ は自明な $w$ 被覆

**while True** :

  $G_y$ の（重みなし）最大マッチング $M$ を求める． // $O(mn)$ 時間

  **if** $M$ が完全マッチング :

    **return** $M$ // 相補性条件より，$M$ は最大重みマッチング

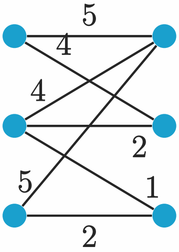
  **else** // $w$ 被覆 $y$ を更新

    $X$ を $D_M(y)$ における $U^+$ から到達可能な頂点全体とする．

    $\varepsilon := \min\{y_i + y_j - w_{ij} : i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$

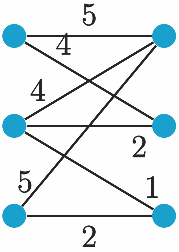
    $y_i \leftarrow y_i - \varepsilon \ (i \in V^+ \cap X)$, $y_j \leftarrow y_j + \varepsilon \ (j \in V^- \cap X)$

# 例

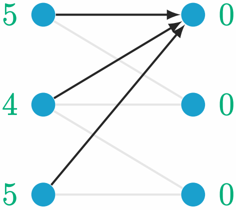



$G$

# 例

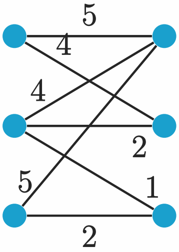



$G$

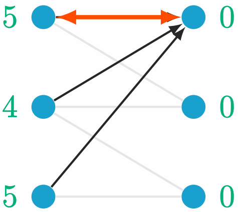



$y(V) = 14,$

# 例

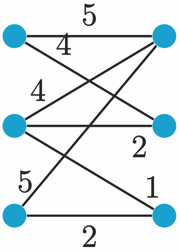



$G$

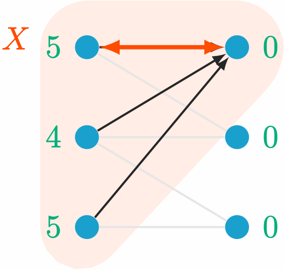



$y(V) = 14,$

# 例

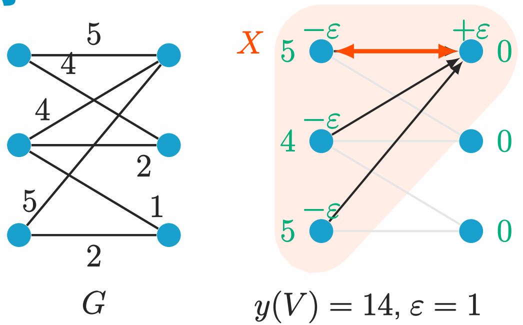



$G$



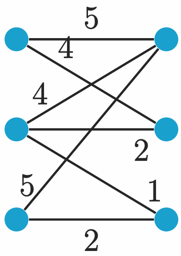

$y(V) = 14,$

# 例

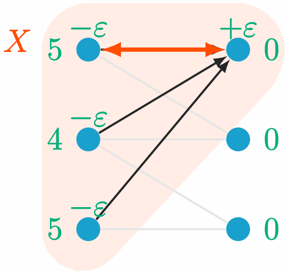



$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$

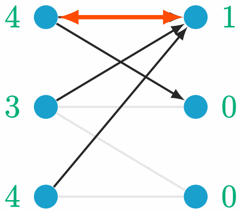
# 例




$G$

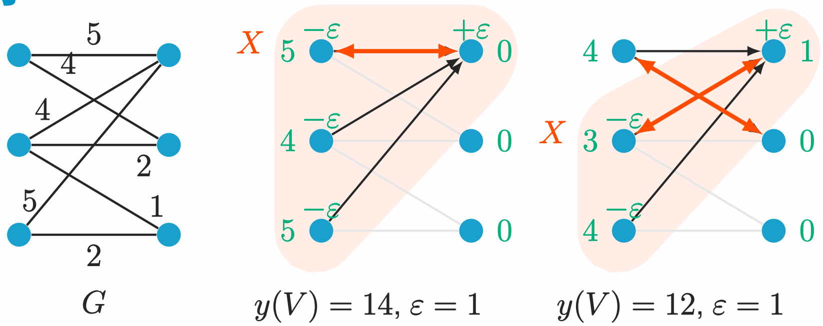



$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$



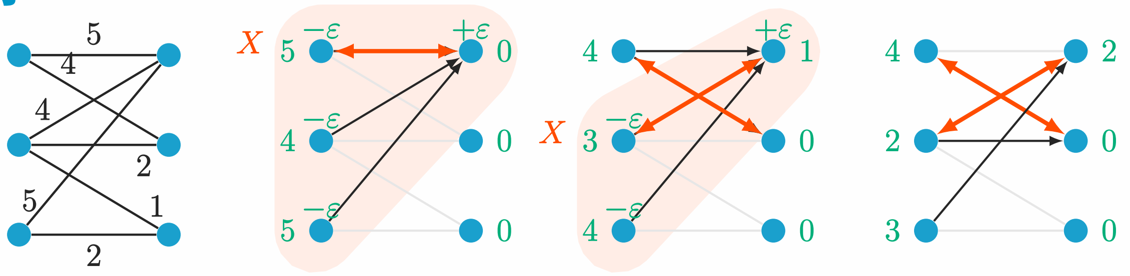

$y(V) = 12,$

# 例



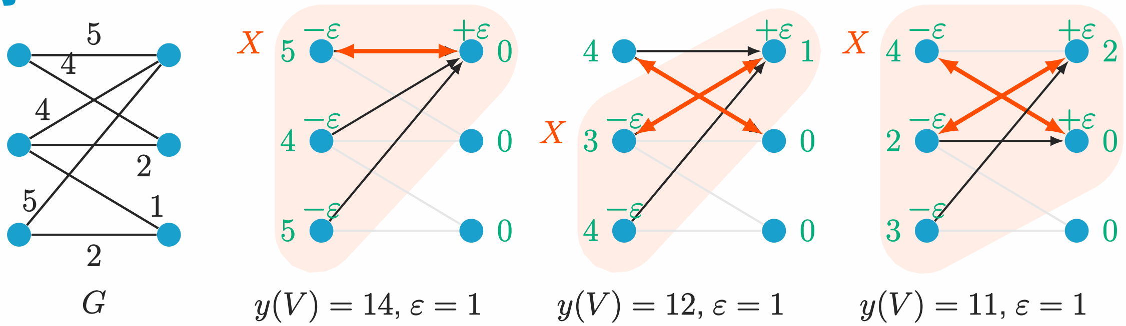
5
4
4
2
5
1
2
$G$
$X$
5
4
5
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$+\varepsilon$
0
0
0
$y(V) = 14$, $\varepsilon = 1$
4
3
4
$X$
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$+\varepsilon$
1
0
0
$y(V) = 12$, $\varepsilon = 1$

# 例



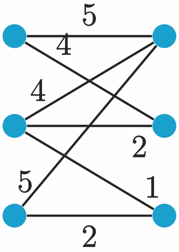

$G$ $\quad$ $y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$ $\quad$ $y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$ $\quad$ $y(V) = 11,$

# 例

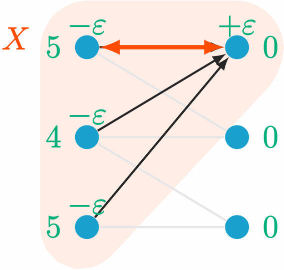


5
4
4
2
5
1
2
$G$
$X$
$-\varepsilon$
$+\varepsilon$
$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$
$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$
$y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$

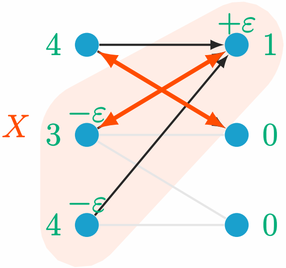
# 例



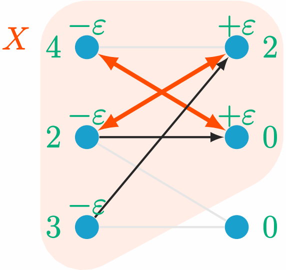

$G$



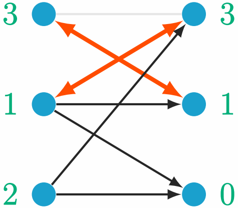

$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$




$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$

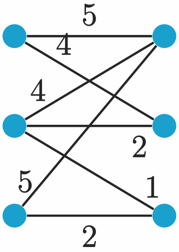



$y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$

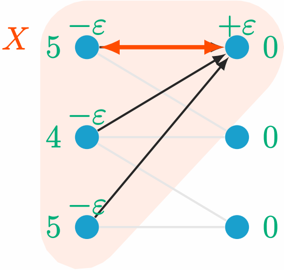



$y(V) = 10$

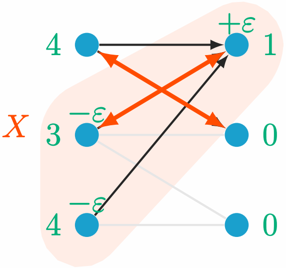
# 例



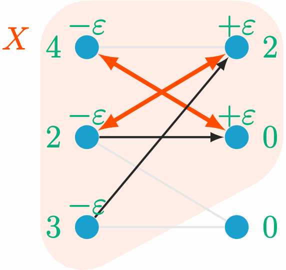

$G$



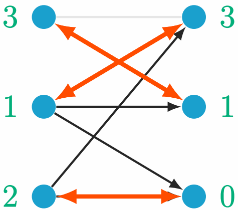

$y(V) = 14,\ \varepsilon = 1$




$y(V) = 12,\ \varepsilon = 1$




$y(V) = 11,\ \varepsilon = 1$




$y(V) = 10 = w(M)$ 【終了】

# ハンガリー法の解析

**定理**

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 $w$ 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

# ハンガリー法の解析

**定理**

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 $w$ 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．

$\longrightarrow$ $M$ は高々 $n/2$ 回更新される．

# ハンガリー法の解析

**定理**

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 $w$ 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ $y$ が更新されて $y'$ になったとき，$G_y$ の最大マッチング $M$ は $G_{y'}$ でもマッチング．

$\longrightarrow$ $M$ は高々 $n/2$ 回更新される．

# ハンガリー法の解析

**定理**

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 $w$ 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ $y$ が更新されて $y'$ になったとき，$G_y$ の最大マッチング $M$ は $G_{y'}$ でもマッチング．

$\longrightarrow$ $M$ は高々 $n/2$ 回更新される．

- また，$|M|$ が増えず $y$ だけが更新されるとき，$\varepsilon$ の定義の min を達成する枝により，到達可能集合 $X$ が真に拡大する．
$\longrightarrow$ 高々 $n$ 回の $y$ の更新後に，$|M|$ は増える．

# ハンガリー法の解析

**定理**

ハンガリー法は $O(mn^3)$ 時間で最大重み完全マッチングと最小 $w$ 被覆を求める．
$(m = |E|, n = |V|)$

- アルゴリズムの実行中に $|M|$ は減らない．
  - $(\because)$ $y$ が更新されて $y'$ になったとき，$G_y$ の最大マッチング $M$ は $G_{y'}$ でもマッチング．

  $\longrightarrow$ $M$ は高々 $n/2$ 回更新される．
- また，$|M|$ が増えず $y$ だけが更新されるとき，$\varepsilon$ の定義の min を達成する枝により，到達可能集合 $X$ が真に拡大する．
  $\longrightarrow$ 高々 $n$ 回の $y$ の更新後に，$|M|$ は増える．
- $\therefore$ 全体では $O(n^2)$ 回の反復．