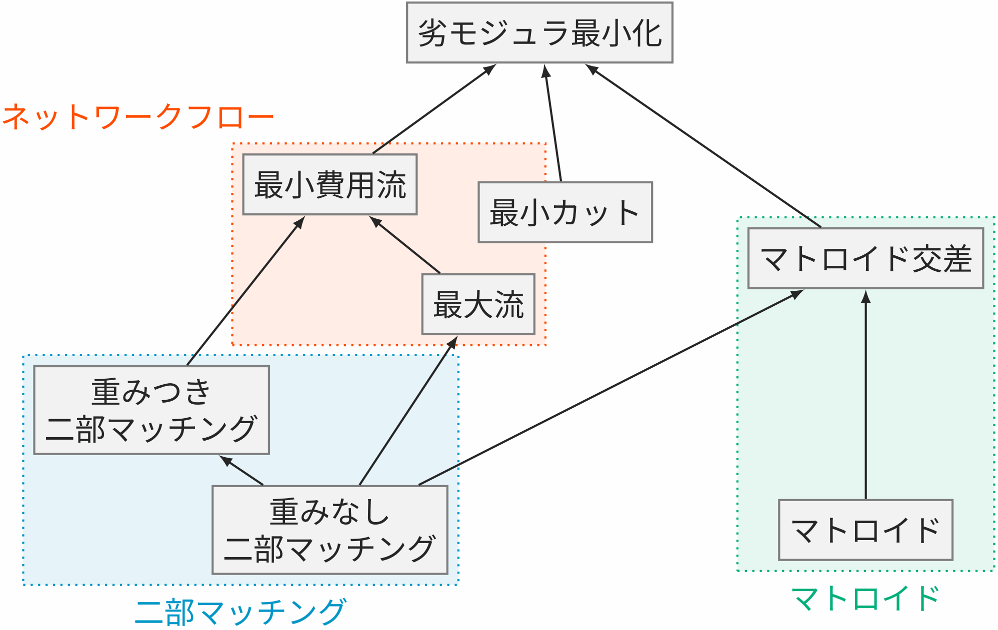
組合せ最適化特論
第２回（二部マッチング②）

担当: **相馬 輔**

2025/11/6


劣モジュラ最小化
ネットワークフロー
最小費用流
最小カット
最大流
マトロイド交差
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド
二部マッチング
マトロイド

各回の内容（予定） I

1. (10/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）
2. (10/30) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
3. **(11/6) 二部マッチング②（最短路問題の復習，逐次最短路法と主双対法，最適性基準からの見方）**

(11/13) 休み

(11/20) 休み

(11/27) 休み

各回の内容（予定） II

4. (12/4) 最大流①（定式化，最大流最小カット定理，Menger の定理，Hakimi の定理，密グラフ抽出）
5. (12/11) 最大流②（残余ネットワーク，Ford-Fulkerson 法，容量スケーリング法）

   ~~(12/11) 最小カット（永持茨木のアルゴリズム，Karger のアルゴリズム）~~
6. (12/18) 最小費用流①（定式化，輸送問題，最大流との関係，応用？）
7. (12/25) 最小費用流②（閉路最適性基準，逐次最短路法，容量スケーリング法）

   (1/1) 休み
8. (1/8) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）

   (1/15) 休み

各回の内容（予定） III

9. (1/22) マトロイド交差①（定義，Edmonds の最大最小定理，応用例）
10. (1/29) マトロイド交差②（交換可能性グラフ，増加道アルゴリズム）
11. (2/5) 劣モジュラ関数①（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）
12. (2/12) 劣モジュラ関数②（劣モジュラ最大化，近似アルゴリズム，貪欲法）

(2/19) 予備

目次

目次

1. **最短路問題**
   - 定義
   - 負閉路とポテンシャル
2. **逐次最短路法と主双対法**
   - 逐次最短路法
   - 主双対法
3. **最適性条件からの見方**
   - ポテンシャル最適性条件
   - 閉路最適性条件
   - アルゴリズム再訪

最短路問題

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $s, t \in V$, $\ell : A \to \mathbb{R}$: 枝長

P: s–t 路（s から t へ行く経路で，同じ頂点を複数回通っても良い）に対し，

$$\ell(P) := \sum_{e \in E(P)} \ell(e)$$

を P の長さとする．

最短路問題

s–t 路 P のうち，長さ $\ell(P)$ 最小のものを求めよ．

最短路問題と負閉路

s を固定する．任意の t に対して，最短路は存在するか？

補題

G の任意の頂点は s から到達可能であるとする．このとき，以下は同値:

- 任意の t に対し s–t 最短路が存在
- 有向閉路 C で $\ell(C) < 0$ なるもの（**負閉路**）は存在しない．

ポテンシャル

定義 (ポテンシャル)

$p : V \to \mathbb{R}$ が枝長 ℓ に関する**（実行可能）ポテンシャル**

$\overset{\text{def}}{\iff} \ p(j) - p(i) \leq \ell(a) \quad (a = ij \in A)$

補題

G の任意の頂点は s から到達可能とする．このとき，以下は同値:

1. 任意の t に対し s–t 最短路が存在
2. ポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ が存在
3. 負閉路が存在しない

ポテンシャル

1. 任意の t に対し s–t 最短路が存在
2. ポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ が存在
3. 負閉路が存在しない

(証明)
① $\Longrightarrow$ ②: $p(t) :=$ (s–t 最短路長) とおく．任意の枝 $a = ij \in A$ に対し，図より

$$p(j) \leq p(i) + \ell(a).$$

ポテンシャル

1. 任意の t に対し s–t 最短路が存在
2. ポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ が存在
3. 負閉路が存在しない

(証明)

① $\Longrightarrow$ ②: $p(t) :=$ (s–t 最短路長) とおく．任意の枝 $a = ij \in A$ に対し，図より

$$p(j) \leq p(i) + \ell(a).$$

② $\Longrightarrow$ ③: 任意の有向閉路 $C : v_0; v_1; \ldots; v_k = v_0$ に対して，

$$\ell(C) = \sum_{i=1}^{k} \ell(v_{i-1}v_i) \geq \sum_{i=1}^{k} (p(v_i) - p(v_{i-1})) = 0.$$

ポテンシャル

1. 任意の t に対し s–t 最短路が存在
2. ポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ が存在
3. 負閉路が存在しない

(証明)

① $\Longrightarrow$ ②: $p(t) :=$ (s–t 最短路長) とおく．任意の枝 $a = ij \in A$ に対し，図より

$$p(j) \leq p(i) + \ell(a).$$

② $\Longrightarrow$ ③: 任意の有向閉路 $C : v_0; v_1; \ldots; v_k = v_0$ に対して，

$$\ell(C) = \sum_{i=1}^{k} \ell(v_{i-1}v_i) \geq \sum_{i=1}^{k} (p(v_i) - p(v_{i-1})) = 0.$$

③ $\Longrightarrow$ ①: すでにやった． $\square$

最短路問題のアルゴリズム

単一の始点 s に対して，全ての t に関する最短路問題を同時に解くアルゴリズムが知られている:

一般の枝長 ℓ: Bellman–Ford 法 $O(mn)$ 時間　※負閉路がある場合は検出も可能

非負の枝長 ℓ: Dijkstra 法 $O(m + n \log n)$ 時間

$(n = |V|, m = |E|)$

これらは，s–t 最短路だけでなく，実行可能ポテンシャル (=最短路長) も同時に求める．

目次

1. **最短路問題**
   - 定義
   - 負閉路とポテンシャル
2. **逐次最短路法と主双対法**
   - 逐次最短路法
   - 主双対法
3. **最適性条件からの見方**
   - ポテンシャル最適性条件
   - 閉路最適性条件
   - アルゴリズム再訪

重み付き二部マッチング

重み付き二部マッチング問題

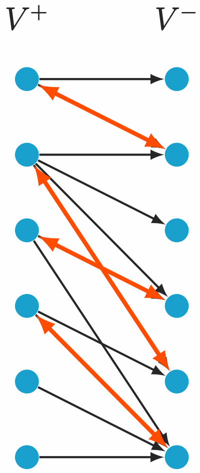
入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が**最小**のマッチング M

補助ネットワーク（復習）

マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする．



D_M

補助ネットワーク（復習）

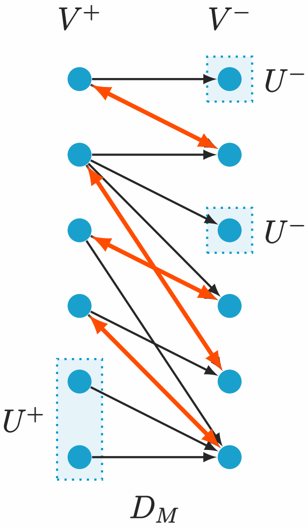
マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする． また，

- $U^+ := M$ に接続していない V^+ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない V^- の頂点集合

とする．



補助ネットワーク（復習）

マッチング M に対し，G の枝を

- M の枝は両向き，
- $E \setminus M$ の枝は V^+ から V^- 向き

に向き付けた有向グラフを D_M とする．また，

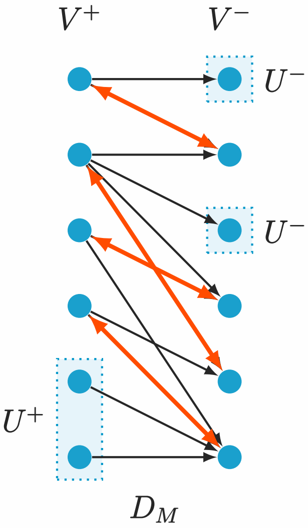
- $U^+ := M$ に接続していない V^+ の頂点集合
- $U^- := M$ に接続していない V^- の頂点集合

とする．

増加道 $\longleftrightarrow$ D_M における U^+ から U^- への有向パス

$\therefore$ 幅優先探索により $O(m)$ 時間で増加道が求められる

$(m = |E|)$

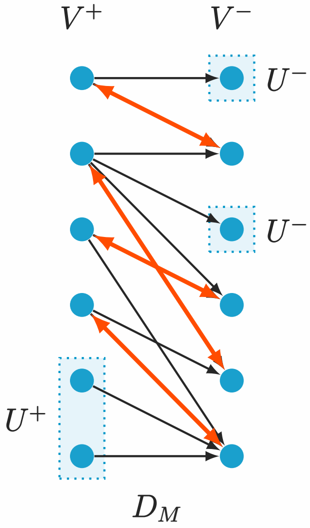


逐次最短路法

マッチング M に対し，D_M の枝長 ℓ_M を

$$\ell_M(a) := \begin{cases} w(e) & (a = V^+ \text{ から } V^- \text{ 向きの } e \in E) \\ -w(e) & (a = V^- \text{ から } V^+ \text{ 向きの } e \in E) \end{cases}$$

と定める．



逐次最短路法

マッチング M に対し，D_M の枝長 ℓ_M を

$$\ell_M(a) := \begin{cases} w(e) & (a = V^+ \text{ から } V^- \text{ 向きの } e \in E) \\ -w(e) & (a = V^- \text{ から } V^+ \text{ 向きの } e \in E) \end{cases}$$

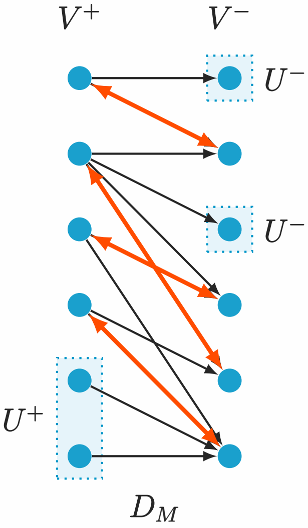
と定める．

🤔 **（なぜこう定めるのか？）**

交互道 or 交互サイクル P に関して反転操作を行った後のマッチング $M \triangle P$ の重みが

$$w(M \triangle P) = w(M) + \ell_M(P)$$

と書けて便利なので．



逐次最短路法

$w(M \triangle P) = w(M) + \ell_M(P)$ より，$\ell_M(P)$ 最小の増加道 P を選ぶのが良さそう

逐次最短路法

1: $M \leftarrow \emptyset$ // 初期マッチング
2: **while** M に対する増加道が存在する :
3: 補助ネットワーク (D_M, ℓ_M) 上で U^+–U^- 最短路 P を求める
// *Bellman–Ford* 法で $O(mn)$ 時間
4: $M \leftarrow M \triangle P$ // マッチング更新

$M \triangle P$: M と P の対称差（P に沿って M の枝を反転）

逐次最短路法

$w(M \triangle P) = w(M) + \ell_M(P)$ より，$\ell_M(P)$ 最小の増加道 P を選ぶのが良さそう

逐次最短路法

1: $M \leftarrow \emptyset$ // 初期マッチング
2: **while** M に対する増加道が存在する：
3: 補助ネットワーク (D_M, ℓ_M) 上で U^+–U^- 最短路 P を求める
// Bellman–Ford 法で $O(mn)$ 時間
4: $M \leftarrow M \triangle P$ // マッチング更新

$M \triangle P$: M と P の対称差（P に沿って M の枝を反転）

定理

逐次最短路法で求まるマッチングを $\emptyset = M_0, M_1, \cdots, M_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，M_k は大きさ k のマッチングのうち重み最小である．また，大きさ $\mu + 1$ 以上のマッチングは存在しない．

逐次最短路法の証明

定理

逐次最短路法で求まるマッチングを $\emptyset = M_0, M_1, \cdots, M_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，M_k は大きさ k のマッチングのうち重み最小である．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ は自明．
M が大きさ k の最小重みマッチングで，少なくとも 1 つ増加道をもつと仮定する．

Claim. (D_M, ℓ_M) は U^+–U^- 最短路をもつ

逐次最短路法の証明

定理

逐次最短路法で求まるマッチングを $\emptyset = M_0, M_1, \cdots, M_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，M_k は大きさ k のマッチングのうち重み最小である．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ は自明．
M が大きさ k の最小重みマッチングで，少なくとも 1 つ増加道をもつと仮定する．

Claim. (D_M, ℓ_M) は U^+–U^- 最短路をもつ

(∵) 負閉路が存在しないことを示せば良い．負閉路 C が存在したと仮定する．C は交互サイクルであるとしてよい．すると，$M \triangle C$ は大きさ k のマッチングで，

$$w(M \triangle C) = w(M) + \ell_M(C) < w(M)$$

となり，矛盾． □

逐次最短路法の証明

定理

逐次最短路法で求まるマッチングを $\emptyset = M_0, M_1, \cdots, M_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，M_k は大きさ k のマッチングのうち重み最小である．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ は自明．
M が大きさ k の最小重みマッチングで，少なくとも 1 つ増加道をもつと仮定する．

Claim. (D_M, ℓ_M) は U^+–U^- 最短路をもつ

P を U^+–U^- 最短路とし，$M^+ := M \triangle P$ を更新後のマッチングとする．

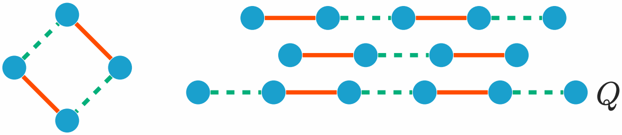
Claim. 任意の大きさ $k+1$ のマッチング N に対し，$w(M^+) \leq w(N)$

逐次最短路法の証明

M: 大きさ k の最小重みマッチング
$P = (D_M, \ell_M)$ 上の U^+–U^- 最短路
$M^+ := M \triangle P$: 更新後のマッチング

Claim. 任意の大きさ $k+1$ のマッチング N に対し，$w(M^+) \leq w(N)$

(∵) M と N の対称差 $M \triangle N$ は，交互道と偶サイクルからなる．いま，$|M| < |N|$ より，この中に M 増加道 Q が存在する．

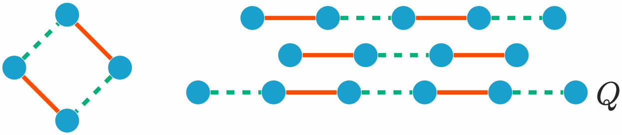


逐次最短路法の証明

M: 大きさ k の最小重みマッチング
$P = (D_M, \ell_M)$ 上の U^+–U^- 最短路
$M^+ := M \triangle P$: 更新後のマッチング

Claim. 任意の大きさ $k+1$ のマッチング N に対し，$w(M^+) \leq w(N)$

(∵) M と N の対称差 $M \triangle N$ は，交互道と偶サイクルからなる．いま，$|M| < |N|$ より，この中に M 増加道 Q が存在する．



P は最短路なので，$\ell_M(P) \leq \ell_M(Q)$.

また，$N \triangle Q$ は大きさ k のマッチングなので，

$$w(M) \leq w(N \triangle Q) = w(N) - \ell_M(Q).$$

これらより，

$$w(M^+) = w(M) + \ell_M(P) \leq w(N) - \ell_M(Q) + \ell_M(P) \leq w(N). \quad \square$$

逐次最短路法の計算量

計算量解析

- M の更新は μ 回 ($\mu =$ 最大マッチングの大きさ)
- 各更新は 1 回の (D_M, ℓ_M) 上の最短路問題
  $\longrightarrow$ Bellman–Ford 法で $O(mn)$ 時間

($n = |V|, m = |E|$)

定理 (伊理 (1960))

逐次最短路法は，$O(mn\mu)$ 時間で，$k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対する大きさ k の最小重みマッチング M_k を求める．

Cf. ハンガリー法 $O(mn^3)$ 時間

主双対法

マッチング M とポテンシャル p の両方を保持することで，逐次最短路法の計算量を改善できる．

定義 (簡約枝長)

枝長 $\ell : A \to \mathbb{R}$ のポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ に関する**簡約枝長** $\ell_p : A \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\ell_p(a) := \ell(a) + p(i) - p(j) \quad (a = ij \in A)$$

観察

- 任意の s–t 路 P に対し，
$$\ell_p(P) = \ell(P) + p(s) - p(t).$$
特に，ℓ_p に関する s–t 最短路 $\iff$ ℓ に関する s–t 最短路．
- $\ell_p \geq 0$ .... **Bellman-Ford 法ではなく Dijkstra 法が使える！**

主双対法

主双対法

$M := \emptyset$ // 初期マッチング
$p(i) := 0\ (i \in V^+),\ p(j) := \min_{i \in \delta(i)} w(ij)\ (j \in V^-)$ // 初期ポテンシャル
while M に対する増加道が存在する：
  簡約枝長 $\ell_{M,p}$ に関する D_M 上の U^+–U^- 最短路 P と最短路長関数 d を求める． // Dijkstra 法で $O(m + n \log n)$ 時間
  $M \leftarrow M \triangle P,\ p \leftarrow p + d$ // マッチングとポテンシャル更新

定理 (Edmonds–Karp (1970), 富澤 (1971))

主双対法で求まるマッチングを $\emptyset = M_0, M_1, \cdots, M_\mu$ とする（$\mu =$ 最大マッチングの大きさ）．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，M_k は大きさ k のマッチングのうち重み最小である．また，全体の計算時間は $O((m + n \log n)\mu)$ 時間．

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に (D_M, ℓ_M) 上のポテンシャル．

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に (D_M, ℓ_M) 上のポテンシャル．

(証明) $p^+ := p + d$ とする．(${d : V \to \mathbb{R}}$ ... $(D_M, \ell_{M,p})$ 上の（U^+ からの）最短路長関数)

d は $(D_M, \ell_{M,p})$ のポテンシャルなので，任意の枝 $a = ij$ に対し，

$$d(j) - d(i) \leq \ell_{M,p}(a) = \ell_M(a) + p(i) - p(j)$$

が成り立つ．移項すると $p^+(j) - p^+(i) \leq \ell_M(a)$ となり，p^+ は (D_M, ℓ_M) のポテンシャルである．

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に (D_M, ℓ_M) 上のポテンシャル．

(証明) $p^+ := p + d$ とする．($d : V \to \mathbb{R}$ ... $(D_M, \ell_{M,p})$ 上の（U^+ からの）最短路長関数)

d は $(D_M, \ell_{M,p})$ のポテンシャルなので，任意の枝 $a = ij$ に対し，

$$d(j) - d(i) \leq \ell_{M,p}(a) = \ell_M(a) + p(i) - p(j)$$

が成り立つ．移項すると $p^+(j) - p^+(i) \leq \ell_M(a)$ となり，p^+ は (D_M, ℓ_M) のポテンシャルである．

次に，$M \leftarrow M \triangle P$ と更新した後も p^+ がポテンシャルであることを示す．最短路 P 上の枝 $a = ij$ では，上の不等式で等号が成立:

$$d(j) - d(i) = \ell_{M,p}(a) \quad \Longleftrightarrow \quad p^+(j) - p^+(i) = \ell_M(a)$$

よって，P の枝を反転しても，p^+ がポテンシャルであることは保たれる．

目次

1. **最短路問題**
   - 定義
   - 負閉路とポテンシャル
2. **逐次最短路法と主双対法**
   - 逐次最短路法
   - 主双対法
3. **最適性条件からの見方**
   - ポテンシャル最適性条件
   - 閉路最適性条件
   - アルゴリズム再訪

最適性条件からの見方

ハンガリー法，逐次最短路法，主双対法は，どれも**“同じアルゴリズム”の異なる姿**と思える．

最適性条件からの見方

ハンガリー法，逐次最短路法，主双対法は，どれも **“同じアルゴリズム”の異なる姿**と思える．

以下，最小重み**完全**マッチングを考えよう．

マッチング M が**完全** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全ての頂点が M に接続 $\iff$ $2|M| = |V|$

重み付き二部完全マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ $(|V^+| = |V^-| = n/2)$，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$ が最小の完全マッチング M

※ 以下，G は少なくとも 1 つの完全マッチングを持つとする．

双対変数とポテンシャル

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \leq w_e \quad (e = ij \in E) \end{aligned}$$

双対変数 $y \in \mathbb{R}^V$ s.t.
$y_i + y_j \leq w_e \ (e = ij \in E)$

$\updownarrow$

ポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ s.t.
$p(j) - p(i) \leq w_e \ (e = ij \in E)$

最適性条件のポテンシャルを用いた書き換え

相補性条件 (復習)

$M \subseteq E, y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. y は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

補題

$M \subseteq E, p : V \to \mathbb{R}$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. p は (D_M, ℓ_M) のポテンシャル

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad (i \in V) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{i \in V} y_i =: y(V) \\ \text{s.t.} \quad & y_i + y_j \leq w_e \quad (e \in E) \end{aligned}$$

相補性条件のポテンシャルを用いた書き換え

相補性条件 (復習)

$M \subseteq E, y \in \mathbb{R}^V$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. y は (D) の実行可能解
3. $y_i + y_j = w_e \quad (e = ij \in M)$

補題

$M \subseteq E, p : V \to \mathbb{R}$ が最適解 $\iff$

1. M は完全マッチング
2. p は (D_M, ℓ_M) のポテンシャル

(証明) D_M においては，M の枝は両向きであることに注意する．p がポテンシャルならば，$e = ij \in M$ に対し，

$$
\begin{aligned}
p(j) - p(i) &\leq \ell_M(\overrightarrow{e}) = w_e \\
p(i) - p(j) &\leq \ell_M(\overleftarrow{e}) = -w_e
\end{aligned}
$$

が成り立つので，対応する y は③を満たす．逆も同様． □

ポテンシャル最適性条件・閉路最適性条件

補題

完全マッチング M に対し，以下は同値:

1. M は最小重み完全マッチング
2. (D_M, ℓ_M) のポテンシャル p が存在
3. (D_M, ℓ_M) に負閉路は存在しない

(証明)

① $\iff$ ②: M が最適 $\iff$ $\exists p$ s.t. (M, p) は相補性条件を満たす

② $\iff$ ③: 最短路問題のところでやった. $\square$

ハンガリー法（ポテンシャル版）

ハンガリー法

$p(i) := 0\ (i \in V^+)$, $p(j) := \min_{e \in \delta(j)} w_e\ (j \in V^-)$ とする． // p は初期ポテンシャル

while True :

　G_p の（重みなし）最大マッチング M を求める． // $O(mn)$ 時間

　if M が完全マッチング :

　　return M // 相補性条件より，M は最小重みマッチング

　else // ポテンシャル p を更新

　　X を $D_M(p)$ における U^+ から到達可能な頂点全体とする．

　　$\varepsilon := \min\{w_e + p(i) - p(j) : e = ij, i \in V^+ \cap X, j \in V^- \setminus X\}$

$$p(i) \leftarrow \begin{cases} p(i) - \varepsilon & (i \in X) \\ p(i) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ハンガリー法（ポテンシャル版）

ハンガリー法

$p(i) := 0\ (i \in V^+)$, $p(j) := \min_{e\in\delta(j)} w_e\ (j \in V^-)$ とする． // p は初期ポテンシャル
while True :

    if G_p が完全マッチング (say M) をもつ :
        return M // 相補性条件より，M は最小重みマッチング
    else // ポテンシャル p を更新
        G_p の最小頂点被覆 (S, T) を求める // $|S| + |T| < n$
        $\varepsilon := \min\{w_e + p(i) - p(j) : e = ij \in E$ s.t. (S, T) に被覆されていない $\}$
        $p(i) \leftarrow \begin{cases} p(i) - \varepsilon & (i \in (V^+ \setminus S) \cup T) \\ p(i) & (\text{otherwise}) \end{cases}$

最後の反復以外，M を使っていない！ 実質的に保持しているのはポテンシャル p のみ．

逐次最短路法，主双対法，ハンガリー法

	逐次最短路法	主双対法	ハンガリー法
変数	マッチング M (ポテンシャルは陰に保持)	マッチング M ポテンシャル p	(マッチングは保持しない) ポテンシャル p
更新方法	最短路 (Bellman–Ford)	最短路 (Dijkstra)	幅優先探索
計算量	$O(mn^2)$	$O((m+n\log n)n)$	$O(mn^3)$

どれも

ポテンシャル（双対変数）$p : V \to \mathbb{R}$ を保持し，
マッチング M が完全になるまで更新する

アルゴリズムとみなせる．

まとめ: 二部マッチング

まとめ

- 重みなし: 増加道アルゴリズム
- 重みあり: 逐次最短路法，主双対法，ハンガリー法
- 双対変数と最短路問題のポテンシャルの関係

…………………………… ネットワークフローやマトロイド交差へ

その他のアルゴリズム

- Hopcroft–Karp–Karzanov 法 (1973): 重みなし $O(m\sqrt{n})$ 時間
- 重みあり: $m^{1+o(1)}$ 時間（*JACM* 2025[1], 最小費用流）

[1]L. Chen, R. Kyng, Y. P. Liu, R. Peng, M. P. Gutenberg, and S. Sachdeva, *“Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time”*, *JACM*, 2025.