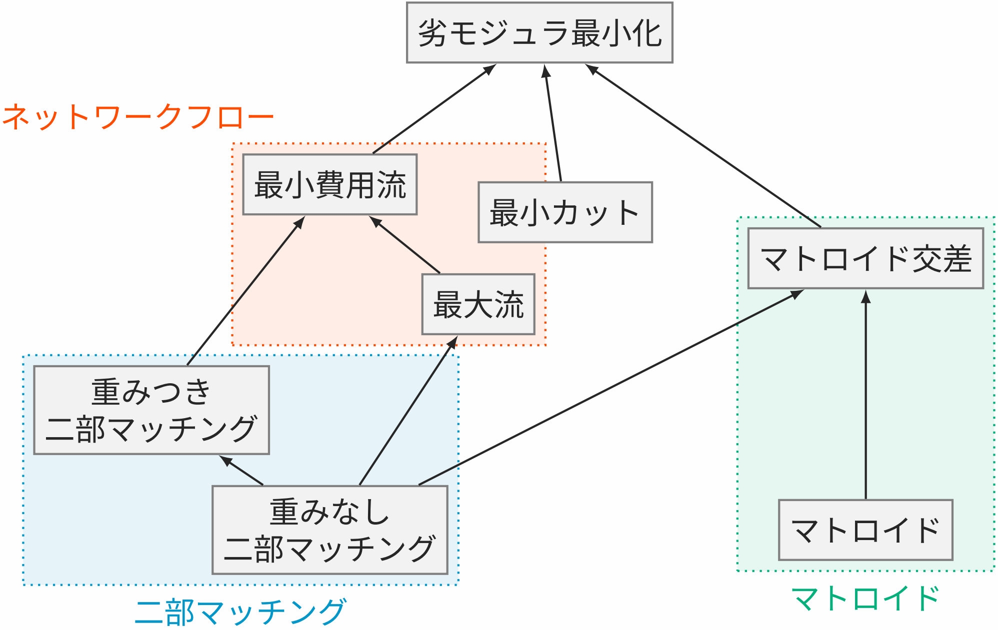
組合せ最適化特論
第７回（マトロイド）

担当: **相馬 輔**

2026/1/22


劣モジュラ最小化
ネットワークフロー
最小費用流
最小カット
最大流
マトロイド交差
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド
二部マッチング
マトロイド

各回の内容（予定） I

1. (10/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）
2. (10/30) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
3. (11/6) 二部マッチング②（最短路問題の復習，逐次最短路法と主双対法，最適性基準からの見方）
4. (12/9) 最大流①（定式化，最大流最小カット定理，応用例）
5. (12/16) 最大流②（残余ネットワーク，Ford–Fulkerson 法，Edmonds–Karp のアルゴリズム）
6. (12/23) 最小費用流（定式化，輸送問題，最大流との関係，逐次最短路法，容量スケーリング法）

各回の内容（予定） II

(1/1) 休み

(1/15) 休み

7. **(1/22) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）**
8. (1/22) 独立マッチング・マトロイド交差 （定義，応用例，Edmonds の最大最小定理，増加道アルゴリズム）
9. (2/5) 劣モジュラ関数（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）

(2/12) 予備

目次

1. マトロイドとは

- マトロイドの諸例
- 独立集合族
- 基族
- 階数関数

2. 最小重み独立集合と貪欲法

- 最小重み独立集合問題
- 貪欲法
- Kruskal のアルゴリズム

3. マトロイド多面体

- 線形不等式系と整数性

目次

1. **マトロイドとは**
   - マトロイドの諸例
   - 独立集合族
   - 基族
   - 階数関数
2. **最小重み独立集合と貪欲法**
   - 最小重み独立集合問題
   - 貪欲法
   - Kruskal のアルゴリズム
3. **マトロイド多面体**
   - 線形不等式系と整数性

マトロイドとは

マトロイド (matroid; matrix + -oid)

Whitney (1935), 中澤 (1935), Pauc–Haupt–Nöbeling (1937–1940), Rado (1942) らによって独立に導入された組合せ構造．

組合せ最適化におけるマトロイドの重要性

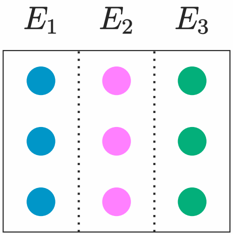
基本的な組合せ最適化問題にマトロイド制約を加えることで，非自明な一般化が得られる．

- **二部マッチング ⟶ 独立マッチング・マトロイド交差（次回）**
- サイズ制約劣モジュラ最大化 ⟶ マトロイド制約劣モジュラ最大化
- 秘書問題 ⟶ マトロイド秘書問題

…

マトロイドの例①（分割マトロイド）

E: 有限集合
(E_1, E_2, E_3): E の分割 ※一般に k 分割でもよい



$$\mathcal{I} = \{ I \subseteq E : |I \cap E_i| \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3) \}$$

集合族 $\mathcal{I}$ は以下の 3 つの性質を満たす:

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I1) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$

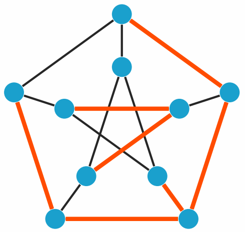
(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies \exists e \in I_2 - I_1$ s.t. $I_1 + e \in \mathcal{I}$

$(I_1 + e := I_1 \cup \{e\})$

マトロイドの例②（グラフ的マトロイド）

$G = (V, E)$: 無向グラフ

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E : I \text{ は森 (閉路を含まない部分グラフ)}\}$$



森の例

補題

集合族 $\mathcal{I}$ は以下の 3 つの性質を満たす:

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$

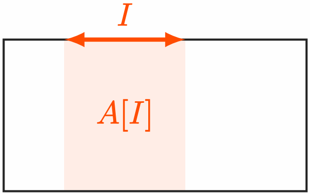
(I1) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies \exists e \in I_2 - I_1$ s.t. $I_1 + e \in \mathcal{I}$

マトロイドの例③（線形マトロイド）

A: （体 $\mathbb{F}$ 上の）$r \times n$ 行列
$E = \{1, \ldots, n\}$

$\mathcal{I} = \{I \subseteq E$: 列部分行列 $A[I]$ の列は一次独立 $\}$



補題

集合族 $\mathcal{I}$ は以下の 3 つの性質を満たす:

- **(I0)** $\emptyset \in \mathcal{I}$
- **(I1)** $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$
- **(I2)** $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies \exists e \in I_2 - I_1$ s.t. $I_1 + e \in \mathcal{I}$

補題の証明

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(I1) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$
(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies$
$\exists e \in I_2 - I_1$ s.t. $I_1 + e \in \mathcal{I}$

(証明) (I0), (I1): 定義から自明.

(I2): 独立集合 I_1, I_2 $(|I_1| < |I_2|)$ を取る.

Claim. $A[I_2]$ の列のうち，$A[I_1]$ の列が張る部分空間に含まれないものが存在する.

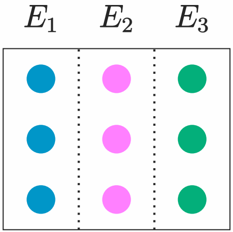
(∵) $A[I_1], A[I_2]$ の列の張る部分空間をそれぞれ W_1, W_2 とすると，
$\dim W_1 = |I_1| < |I_2| = \dim W_2$ であるから.

そのような列の添字を $e \in I_2 - I_1$ とすると，$I_1 + e$ は独立集合. □

分割マトロイド ⊂ 線形マトロイド

E: 有限集合
(E_1, E_2, E_3): E の分割 ※一般に k 分割でもよい
に対して，行列

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad E_1 \quad & \quad E_2 \quad & \quad E_3 \quad \end{array} \\
A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$



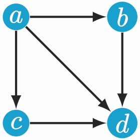
を考えると，A が定める線形マトロイドの独立集合族
は分割マトロイドの独立集合族に一致する．

グラフ的マトロイド ⊂ 線形マトロイド

ネットワーク行列 (復習) 有向グラフ $G = (V, A)$ に対し，
$V \times A$ 行列 B を

$$B_{i,a} := \begin{cases} +1 & (i \text{ は } a \text{ の始点}) \\ -1 & (i \text{ は } a \text{ の終点}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$(i \in V, a \in A)$ と定める．



$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

補題

無向グラフ $G = (V, E)$ の枝を任意に向き付けた有向グラフを考え，そのネットワーク行列を B とする．このとき，$B[I]$ の列は一次独立 $\iff$ I は G の森

マトロイドの定義（独立集合族）

定義

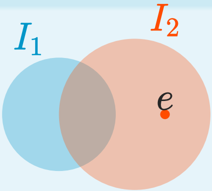
E: 有限集合, $\mathcal{I} \subseteq 2^E$: 部分集合族

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ が**マトロイド** $\overset{\text{def}}{\iff}$

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I1) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \implies I' \in \mathcal{I}$

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \implies \exists e \in I_2 - I_1$ s.t. $I_1 + e \in \mathcal{I}$



特に，$I \in \mathcal{I}$ を**独立集合 (independent set)** といい，$\mathcal{I}$ を**独立集合族**という．また，E をマトロイドの**台集合 (ground set)** という．

基族

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$: マトロイド

定義

- 独立集合 I が**極大 (maximal)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ I を真に含む独立集合が存在しない
- 極大な独立集合を $\mathbf{M}$ の**基 (base)** といい，基の全体を**基族 (base family)** という．

例

- 分割マトロイドの基族: 各分割ブロック E_i から要素を 1 つずつ含む集合
- グラフ的マトロイドの基族: グラフが連結であるとすると，基はグラフの**全域木 (spanning tree)**

基族

$\mathcal{B}$ をマトロイドの基族とする．

補題

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies |B_1| = |B_2|$$

基族

$\mathcal{B}$ をマトロイドの基族とする．

補題

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies |B_1| = |B_2|$$

(証明) 背理法．$|B_1| < |B_2|$ とする．B_1, B_2 は独立集合なので，公理 (I2) より，ある $e \in B_2 - B_1$ で $B_1 + e \in \mathcal{I}$ となるものが存在．これは B_1 の極大性に反する． □

基族

$\mathcal{B}$ をマトロイドの基族とする．

補題

$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies |B_1| = |B_2|$

(証明) 背理法．$|B_1| < |B_2|$ とする．B_1, B_2 は独立集合なので，公理 (I2) より，ある $e \in B_2 - B_1$ で $B_1 + e \in \mathcal{I}$ となるものが存在．これは B_1 の極大性に反する． $\square$

基の大きさをマトロイド $\mathbf{M}$ の**階数 (rank)** といい，$r(\mathbf{M})$ で表す．

補題

$I \in \mathcal{I}, |I| = r(\mathbf{M}) \implies I$ は基．

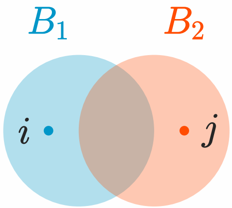
基族

定理

マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ に対し，次が成り立つ:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, $i \in B_1 - B_2$
$\implies \exists j \in B_2 - B_1$ s.t. $B_1 - i + j \in \mathcal{B}$.



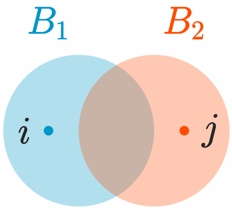
基族

定理

マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ に対し，次が成り立つ:

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$, $i \in B_1 - B_2$
$\implies \exists j \in B_2 - B_1$ s.t. $B_1 - i + j \in \mathcal{B}$.



(証明)

(B1): 公理 (I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$ より，少なくとも 1 つは基が存在する．

(B2): $B_1 - i$ と B_2 は独立集合で，$|B_1 - i| = |B_1| - 1 < |B_2|$．よって，公理 (I2) より，ある $j \in B_2 - (B_1 - i) = B_2 - B_1$ で $(B_1 - i) + j \in \mathcal{I}$ となるものが存在．
$|B_1 - i + j| = |B_1|$ なので，補題よりこれは基． □

基族

実は，基族の性質 (B1), (B2) からマトロイドを定義することもできる．

補題 (cf. [Ch. 14, Korte–Vygen (2018)])

$\mathcal{B} \subseteq 2^E$ を (B1), (B2) を満たす集合族とする．このとき，

$$\mathcal{I} := \{ I \subseteq E : I \text{ はある } B \in \mathcal{B} \text{ に含まれる} \}$$

とすると，$\mathcal{I}$ は独立集合族である．

すなわち，(B1), (B2) もマトロイドの公理系である．

階数関数

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$: マトロイド

定義

- $X \subseteq E$ に対し，X に含まれる最大の独立集合の大きさを X の**階数 (rank)** といい，$r(X)$ で表す．
- $r : X \mapsto r(X)$ を**階数関数 (rank function)** という．

階数関数

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$: マトロイド

定義

- $X \subseteq E$ に対し，X に含まれる最大の独立集合の大きさを X の**階数 (rank)** といい，$r(X)$ で表す．
- $r : X \mapsto r(X)$ を**階数関数 (rank function)** という．

例

- 分割マトロイド: $r(X) = |\{i : E_i \cap X \neq \emptyset\}|$
- グラフ的マトロイド: $r(X) = |V(G[X])| - (G[X]$ の連結成分数$)$

  ($G[X]$: X の誘導部分グラフ)
- 線形マトロイド: $r(X) = \dim \operatorname{span}\{A[X]$ の列ベクトル$\}$

階数関数の性質

定理

マトロイドの階数関数 r は次の性質を満たす:

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X| \quad (X \subseteq E)$

(R2) $r(X) \leq r(Y) \quad (X \subseteq Y \subseteq E)$ 単調性

(R3) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \quad (X, Y \subseteq E)$

劣モジュラ性

実は，(R1)–(R3) もマトロイドの公理系となる．

定理 (cf. [Ch. 14, Korte–Vygen (2018)])

(R1)–(R3) を満たす集合関数 $r : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ に対し，

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : |X| = r(X)\}$$

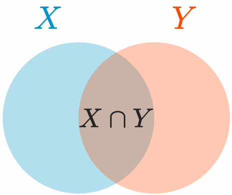
はマトロイドの独立集合族．

定理の証明

(R1) $0 \le r(X) \le |X|$
(R2) $r(X) \le r(Y) \quad (X \subseteq Y \subseteq E)$
(R3) $r(X) + r(Y) \ge r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \quad (X, Y \subseteq E)$

(証明) (R1), (R2): 定義から自明.

(R3): $I_{X\cap Y}$ を $X \cap Y$ の最大独立集合とする．公理 (I2) より，$I_{X\cap Y}$ に $X \cup Y$ の要素を加えて，$X \cup Y$ の最大独立集合 $I_{X\cup Y}$ を作れる．このとき，



- $I_{X\cap Y} = I_{X\cup Y} \cap (X \cap Y)$
- $I_{X\cup Y} \cap X$ は X の独立集合，$I_{X\cup Y} \cap Y$ は Y の独立集合．

よって，

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\ge |I_{X\cup Y} \cap X| + |I_{X\cup Y} \cap Y| \\ &= |I_{X\cup Y} \cap (X \cup Y)| + |I_{X\cup Y} \cap (X \cap Y)| \\ &= |I_{X\cup Y}| + |I_{X\cap Y}| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \quad \square \end{aligned}$$

目次

1. **マトロイドとは**	• マトロイドの諸例 • 独立集合族 • 基族 • 階数関数
2. **最小重み独立集合と貪欲法**	• 最小重み独立集合問題 • 貪欲法 • Kruskal のアルゴリズム
3. **マトロイド多面体**	• 線形不等式系と整数性

最小重み独立集合問題

- E 上のマトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$
- 台集合上の重み $w(e) \in \mathbb{R}$ $(e \in E)$
- 非負整数 $0 \leq k \leq r(\mathbf{M})$

最小重み独立集合問題 (Minimum Weight Independent Set Problem)

$$\text{minimize} \quad w(I) \quad \text{s.t.} \quad I \in \mathcal{I}, |I| = k$$

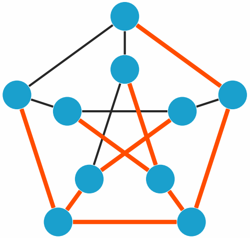
この節の目標: 最小重み独立集合問題は**貪欲法 (greedy algorithm)** で解けることを示す．

例：最小重み全域木問題

$G = (V, E)$: 連結無向グラフ,
$w(e) \in \mathbb{R}$ $(e \in E)$: 枝重み

最小重み全域木問題 (Minimum Weight Spanning Tree Problem)

$$\text{minimize} \quad w(T) \quad \text{s.t.} \quad T\text{ は }G\text{ の全域木}$$

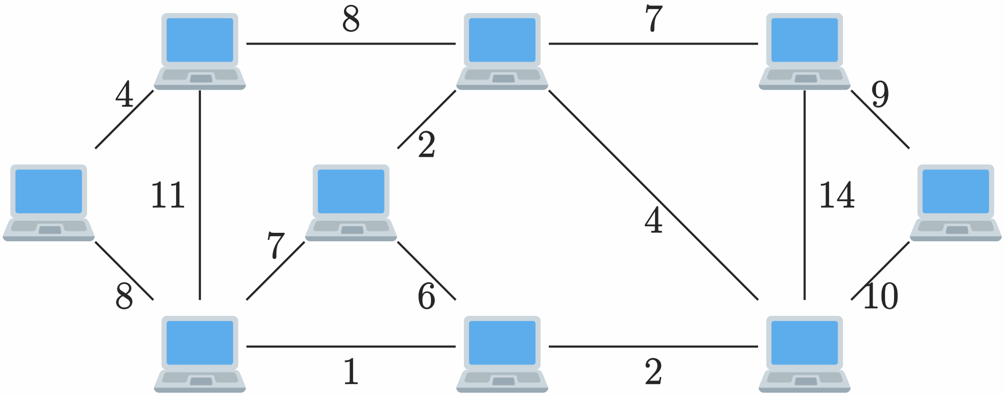


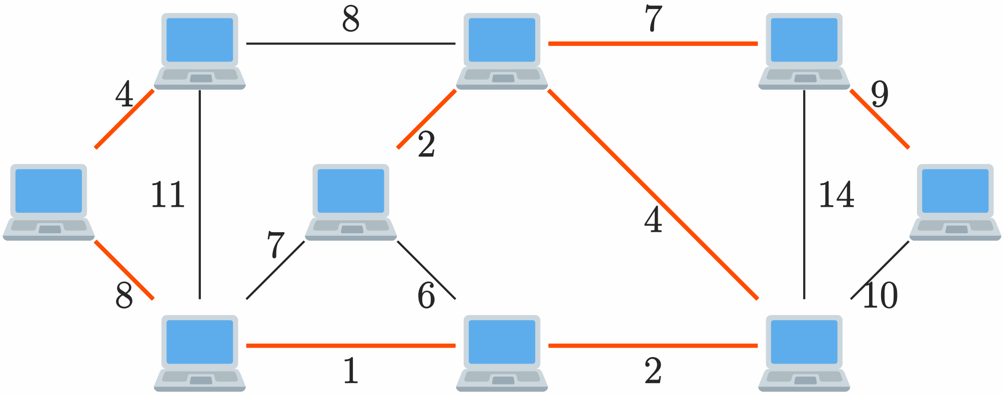
全域木の例

これは

- $\mathbf{M} = G$ のグラフ的マトロイド
- $k = |V| - 1 = r(\mathbf{M})$

に対する最小重み独立集合問題.


8
7
4
9
2
11
14
7
4
8
6
10
1
2


8
7
4
9
2
11
14
7
4
6
8
10
1
2

貪欲法

$X_0 := \emptyset$, $k := 0$.
E の要素を w の昇順に並べる: $w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_n)$ ($n = |E|$).
for $i = 1, \ldots, n$:
  $X_k + e_i \in \mathcal{I}$ ならば e_i を X_k に追加し，$k \leftarrow k + 1$ とする．
  ……………………………… X_k は大きさ k の独立集合

定理

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k が存在し，X_k は大きさ k の独立集合のうち最小重みである．

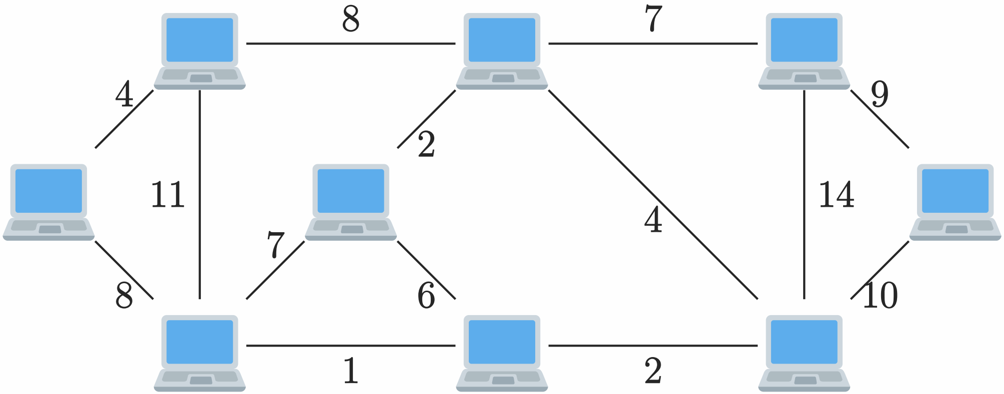
KruskalのアルゴリズM

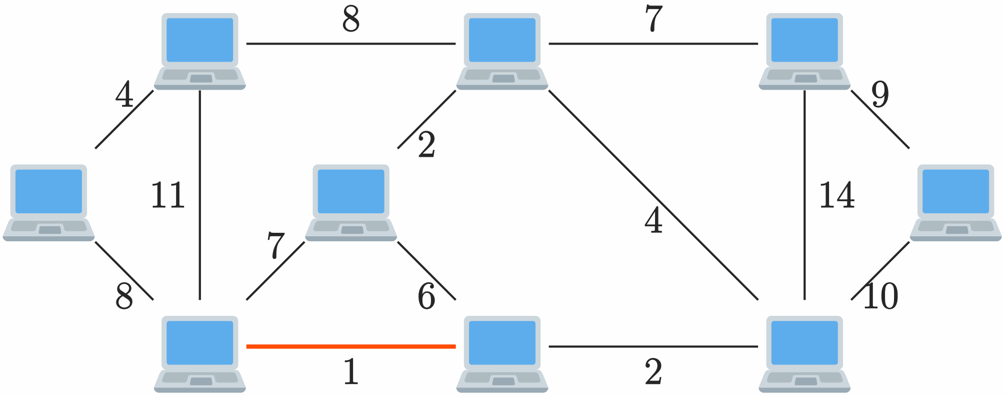
特に最小重み全域木問題に適用したものは**Kruskalのアルゴリズム**と呼ばれる.

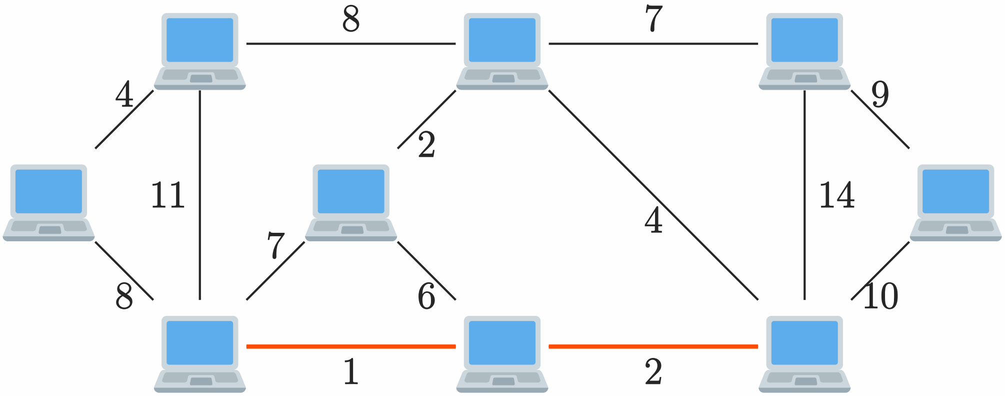
$X := \emptyset$.
枝を w の昇順に並べる: $w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_m)$ $(m = |E|)$.
for $i = 1, \ldots, m$:
　　$X + e_i$ が閉路を含まないならば e_i を X に追加する.
return X

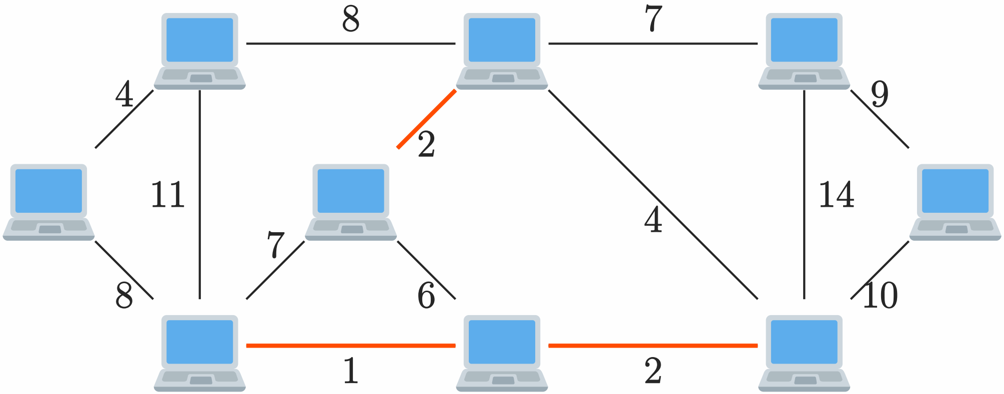
系

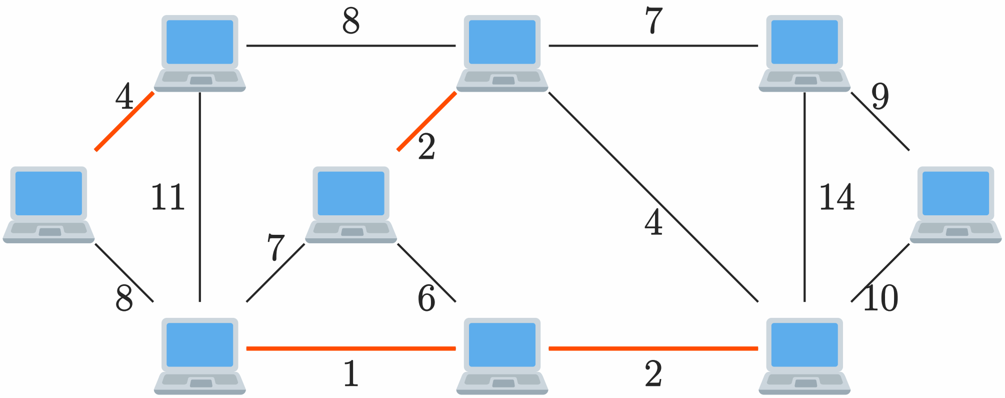
X は最小重み全域木である.

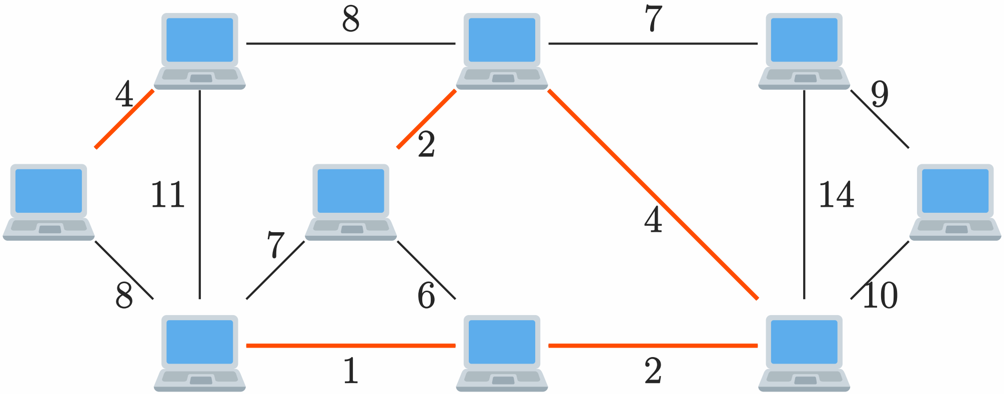

8
7
4
9
2
11
14
7
4
8
6
10
1
2

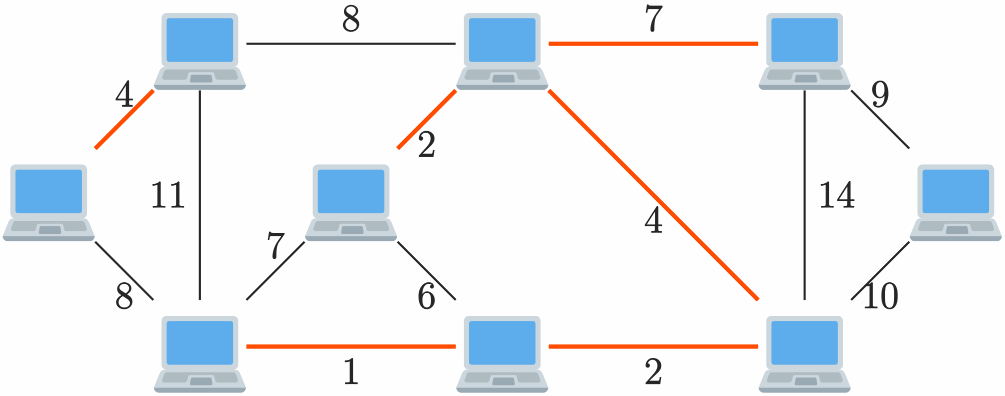

8
7
4
9
2
11
14
4
7
8
6
10
1
2

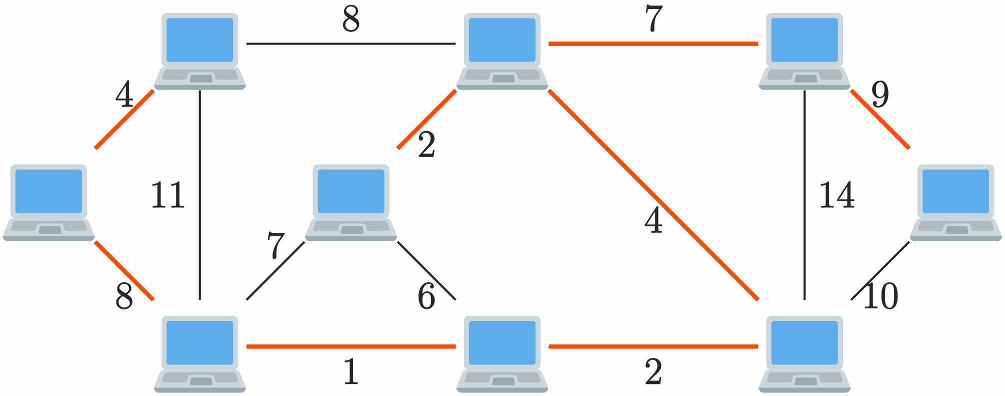

8
7
4
9
2
11
14
4
7
6
8
10
1
2


8
7
4
9
2
11
14
7
4
8
6
10
1
2


8
7
4
9
2
11
4
14
7
8
6
10
1
2


8
7
4
2
9
11
14
4
7
8
6
10
1
2


8
7
4
9
2
11
14
7
4
8
6
10
1
2


8
7
4
9
2
11
14
7
4
8
6
10
1
2

定理の証明

補題

貪欲法の任意の時点を考え，そのときの暫定解 X とする．このとき，
$e \notin X, X + e \in \mathcal{I} \implies e$ はまだ調べていない要素．

定理の証明

補題

貪欲法の任意の時点を考え，そのときの暫定解 X とする．このとき，
$e \notin X, X + e \in \mathcal{I} \implies e$ はまだ調べていない要素．

(証明) e は既に調べた要素だと仮定する．e を調べたときの暫定解を $X' \subseteq X$ とすると，$X' + e \subseteq X + e \in \mathcal{I}$ より，$X' + e \in \mathcal{I}$. よって，貪欲法は e を X' に追加したことになり，$e \in X$ となって矛盾． $\square$

定理の証明

補題

貪欲法の任意の時点を考え，そのときの暫定解 X とする．このとき，
$e \notin X, X + e \in \mathcal{I} \implies e$ はまだ調べていない要素．

(証明) e は既に調べた要素だと仮定する．e を調べたときの暫定解を $X' \subseteq X$ とすると，$X' + e \subseteq X + e \in \mathcal{I}$ より，$X' + e \in \mathcal{I}$. よって，貪欲法は e を X' に追加したことになり，$e \in X$ となって矛盾． □

補題

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k が存在する．

定理の証明

補題

貪欲法の任意の時点を考え，そのときの暫定解 X とする．このとき，
$e \notin X, X + e \in \mathcal{I} \implies e$ はまだ調べていない要素．

(証明) e は既に調べた要素だと仮定する．e を調べたときの暫定解を $X' \subseteq X$ とすると，$X' + e \subseteq X + e \in \mathcal{I}$ より，$X' + e \in \mathcal{I}$. よって，貪欲法は e を X' に追加したことになり，$e \in X$ となって矛盾． $\square$

補題

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k が存在する．

(証明) $k < r(\mathbf{M})$ とし，X_k が存在すると仮定する．$k = |X_k| < r(\mathbf{M})$ より，X_k は基ではないから，$e \notin X_k$ で $X_k + e \in \mathcal{I}$ となるものが存在．

定理の証明

補題

貪欲法の任意の時点を考え，そのときの暫定解 X とする．このとき，
$e \notin X, X + e \in \mathcal{I} \implies e$ はまだ調べていない要素．

(証明) e は既に調べた要素だと仮定する．e を調べたときの暫定解を $X' \subseteq X$ とすると，$X' + e \subseteq X + e \in \mathcal{I}$ より，$X' + e \in \mathcal{I}$. よって，貪欲法は e を X' に追加したことになり，$e \in X$ となって矛盾． $\square$

補題

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k が存在する．

(証明) $k < r(\mathbf{M})$ とし，X_k が存在すると仮定する．$k = |X_k| < r(\mathbf{M})$ より，X_k は基ではないから，$e \notin X_k$ で $X_k + e \in \mathcal{I}$ となるものが存在．
前補題より，e は X_k が定義された時点で，まだ調べていない要素である．よって，少なくとも 1 つは X_k に追加できる要素がまだ残っているので，X_{k+1} が定義される． $\square$

定理の証明

補題

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k は大きさ k の最小重み独立集合．

定理の証明

補題

$k = 0, 1, \ldots, r(\mathbf{M})$ に対し，X_k は大きさ k の最小重み独立集合．

(証明) 背理法．X_k より真に重みの小さい大きさ k の独立集合 Y が存在すると仮定．

$$
\begin{aligned}
X_k &= \{x_1, \ldots, x_k\} \quad (w(x_1) \leq \cdots \leq w(x_k)) \\
Y &= \{y_1, \ldots, y_k\} \quad (w(y_1) \leq \cdots \leq w(y_k))
\end{aligned}
$$

とする．

$w(Y) < w(X_k)$ より，ある $1 \leq i \leq k$ で $w(y_i) < w(x_i)$ が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & \leq \cdots \leq & x_{i-1} & \leq & x_i & \leq \cdots \leq & x_k \\
 & & & & \vee & & \\
y_1 & \leq \cdots \leq & y_{i-1} & \leq & y_i & \leq \cdots \leq & y_k
\end{array}
$$

定理の証明（続き）

$$
\begin{array}{cccccccc}
X_{i-1} & x_1 & \leq \cdots \leq & x_{i-1} & \leq & x_i & \leq \cdots \leq & x_k \\
 & & & & & \vee & & \\
Y_i & y_1 & \leq \cdots \leq & y_{i-1} & \leq & y_i & \leq \cdots \leq & y_k
\end{array}
$$

独立集合 X_{i-1} と Y_i に公理 (I2) を適用すると，ある $y \in Y_i - X_{i-1}$ で $X_{i-1} + y \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

補題より，y は x_i を調べる時点（暫定解 X_{i-1}）でまだ調べられていないので，
$w(y) \geq w(x_i)$ が成立．一方，$w(y) \leq w(y_i) < w(x_i)$ なので，矛盾． $\square$

貪欲法の計算量

一般に，マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ は $|E|$ に対し指数個の独立集合を持つため，独立集合の一覧をアルゴリズムに入力することはできない．

独立性オラクル

部分集合 $X \subseteq E$ を入力すると，X が独立集合か否かを返してくれるオラクル

具体的なマトロイド（グラフ的マトロイドや線形マトロイドなど）では，グラフの操作や行列計算により多項式時間で実装できる．

貪欲法の計算量

一般に，マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ は $|E|$ に対し指数個の独立集合を持つため，独立集合の一覧をアルゴリズムに入力することはできない．

独立性オラクル

部分集合 $X \subseteq E$ を入力すると，X が独立集合か否かを返してくれるオラクル

具体的なマトロイド（グラフ的マトロイドや線形マトロイドなど）では，グラフの操作や行列計算により多項式時間で実装できる．

定理

貪欲法は $O(n \log n + n\mathrm{IO})$ 時間で最小重み独立集合を求める．ただし，$n = |E|$，IO は独立性オラクルの計算時間．

目次

1. **マトロイドとは**
   - マトロイドの諸例
   - 独立集合族
   - 基族
   - 階数関数
2. **最小重み独立集合と貪欲法**
   - 最小重み独立集合問題
   - 貪欲法
   - Kruskal のアルゴリズム
3. **マトロイド多面体**
   - 線形不等式系と整数性

マトロイド多面体

定義

マトロイド M の**マトロイド多面体 (matroid polytope)** を次で定める:

$$P(\mathbf{M}) := \mathrm{conv}\{\mathbf{1}_I : I \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^E$$

($\mathbf{1}_I \in \{0,1\}^E$: I の特性ベクトル)

この節の目標

定理 (Edmonds (1970))

$$P(\mathbf{M}) = \{x \in \mathbb{R}^E : x(X) \leq r_{\mathbf{M}}(X) \quad (X \subseteq E),\ x \geq 0\}$$

マトロイド多面体の例

例 (グラフ的マトロイド)

連結な無向グラフ $G = (V, E)$ に対するグラフ的マトロイドのマトロイド多面体は次で表される:

$$
\begin{aligned}
x(X) &\leq |V(G[X])| - c(G[X]) \quad (X \subseteq E) \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

($G[X]$: X の誘導部分グラフ, $c(G[X])$: $G[X]$ の連結成分数)

定理の証明 (1/4)

$P := \{x \in \mathbb{R}^E : x(X) \leq r_{\mathbf{M}}(X) \quad (X \subseteq E), \quad x \geq 0\}$ とする．

$P(\mathbf{M}) \subseteq P$ であること: $I \in \mathcal{I}$ を独立集合とし，$x = \mathbf{1}_I$ を特性ベクトルとする．任意の部分集合 $X \subseteq V$ に対し，

$$x(X) = |I \cap X| \leq r_{\mathbf{M}}(X). \qquad (I \cap X \subseteq X \text{ は独立集合より})$$

$\therefore x \in P$. P は凸多面体なので，$P(\mathbf{M}) \subseteq P$.

定理の証明 (2/4)

$P \subseteq P(\mathbf{M})$ であること: 任意の $w \in \mathbb{R}^E$ に対し，$\max_{x \in P} w^\top x$ を達成する点が $P(\mathbf{M})$ に存在することを示す．

w を重みとする最大重み独立集合問題を考える:

$$\text{maximize} \quad w(I) \quad \text{s.t.} \quad I \in \mathcal{I}$$

重みを降順に並べて，

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_k) \geq 0 > w(e_{k+1}) \geq \cdots \geq w(e_n)$$

とすると，$e_1, \ldots, e_k$ まで貪欲法を走らせた暫定解が最適解である．それを

$$I = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_\ell}\} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq k)$$

とおく．$x = \mathbf{1}_I \in P(\mathbf{M})$ が $\max_{x \in P} w^\top x$ の最適解であることを示せば良い．

定理の証明 (3/4)

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in X} x(e) \leq r(X) \quad (X \subseteq E) \\
& x(e) \geq 0 \qquad\qquad\quad (e \in E)
\end{aligned}
$$

双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{X \subseteq E} r(X) y_X \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{X \in e} y_X \geq w(e) \quad (e \in E) \\
& y_X \geq 0 \qquad\qquad (X \subseteq E)
\end{aligned}
$$

定理の証明 (4/4)

LP の一般論より，$x = \mathbf{1}_I$ が主最適解であることを示すには，強双対性 $w^\top x = \sum_{X \subseteq E} r(X) y_X$ を満たす双対実行可能解 y を構成すればよい．

実際，

$$y_S := \begin{cases} w(e_{i_j}) - w(e_{i_{j+1}}) & \text{if } S = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_j}\} \quad (j = 1, \ldots, \ell - 1) \\ w(e_{i_\ell}) & \text{if } S = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_\ell}\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると，y は双対実行可能で，(x, y) が強双対性を満たすことが，直接計算により確認できる（各自確認せよ）． □

マトロイド多面体上の線形最適化

系

マトロイド多面体上の線形最適化

$$\max \quad w^\top x \quad \text{s.t.} \quad x(X) \leq r_{\mathrm{M}}(X) \quad (X \subseteq E),\ x \geq 0$$

は $O(n \log n + n\mathrm{IO})$ 時間で最適解を求められる．

指数本の不等式があるにもかかわらず，貪欲法で最適解を求められる．

マトロイド多面体の整数性

系

不等式系 $\{x(X) \leq r_{\mathbf{M}}(X) \quad (X \subseteq E),\ x \geq 0\}$ は整数多面体を定める．

$P(\mathbf{M})$ を定める不等式系の係数行列は**完全単模行列ではない！**

(∵) たとえば $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ のように，行列式 $= 2$ の部分行列を含んでいる．

マトロイド多面体は完全単模性に依らず，整数性が証明できる．

マトロイド基多面体

基についても同様の定理が成り立つ.

定義

マトロイド $\mathbf{M}$ の**基多面体 (base polytope)** を次で定める:

$$B(\mathbf{M}) := \mathrm{conv}\{\mathbf{1}_B : B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathbb{R}^E$$

($\mathbf{1}_B \in \{0,1\}^E$: B の特性ベクトル)

定理 (Edmonds (1970))

$$B(\mathbf{M}) = \{x \in \mathbb{R}^E : x(X) \le r_{\mathbf{M}}(X)\ (X \subseteq E),\ x(E) = r_{\mathbf{M}}(E),\ x \ge 0\}$$

目次

1. マトロイドとは

- マトロイドの諸例
- 独立集合族
- 基族
- 階数関数

2. 最小重み独立集合と貪欲法

- 最小重み独立集合問題
- 貪欲法
- Kruskal のアルゴリズム

3. マトロイド多面体

- 線形不等式系と整数性