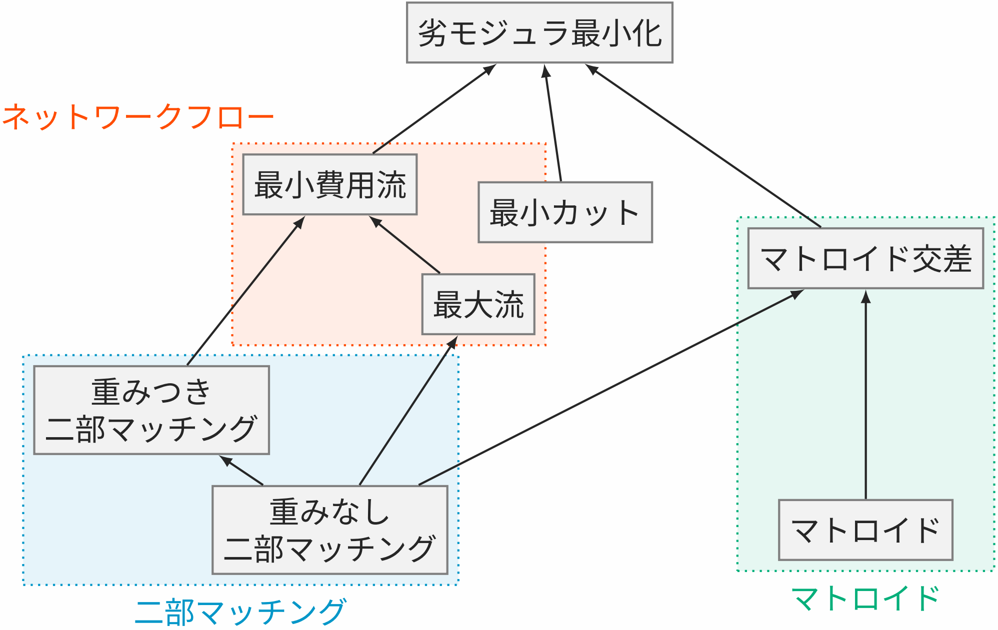
組合せ最適化特論
第 4 回（最大流①）

担当: **相馬 輔**

2025/12/9


劣モジュラ最小化
ネットワークフロー
最小費用流
最小カット
最大流
マトロイド交差
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド
二部マッチング
マトロイド

各回の内容（予定） I

1. (10/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）
2. (10/30) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
3. (11/6) 二部マッチング②（最短路問題の復習，逐次最短路法と主双対法，最適性基準からの見方）
4. **(12/9) 最大流①（定式化，最大流最小カット定理，応用例）**
5. (12/16) 最大流②（残余ネットワーク，Ford–Fulkerson 法，Edmonds–Karp のアルゴリズム）
6. (12/23) 最小費用流（定式化，輸送問題，最大流との関係，逐次最短路法，容量スケーリング法）

各回の内容（予定） II

(1/1) 休み

7. (1/8) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）

(1/15) 休み

8. (1/22) マトロイド交差①（定義，Edmonds の最大最小定理，応用例）
9. (1/29) マトロイド交差②（交換可能性グラフ，増加道アルゴリズム）
10. (2/5) 劣モジュラ関数①（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）
11. (2/12) 劣モジュラ関数②（劣モジュラ最大化，近似アルゴリズム，貪欲法）

(2/19) 予備

目次

1. **最大流問題**
   - 定義
   - 最大流最小カット定理
   - 整数性
2. **最大流を用いたモデリング**
   - Menger の定理
   - 二部マッチング
   - Baseball Elimination
   - 最密部分グラフ

※アルゴリズムは次回

目次

※アルゴリズムは次回

最大流問題: 定義

$G = (V, A)$: 有向グラフ

定義

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ に対し，その**境界** $\partial\varphi : V \to \mathbb{R}$ を

$$(\partial\varphi)(i) := \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) \qquad (i \in V)$$

と定義する．ここで，$\mathrm{In}(i)$, $\mathrm{Out}(i)$ はそれぞれ頂点 i に入る枝，出る枝の集合．

※ $\delta^+(i)$, $\delta^-(i)$ と表記する本もある．

最大流問題: 定義

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $u : A \to \mathbb{R}_+$: 枝容量関数
$s, t \in V$: 始点, 終点

定義 (s–t 流)

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ が s–t 流(フロー) $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A)$ **(容量制約)**
- $(\partial\varphi)(i) = 0 \qquad (i \in V \setminus \{s, t\})$ **(流量保存則)**

最大流問題: 定義

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $u : A \to \mathbb{R}_+$: 枝容量関数
$s, t \in V$: 始点, 終点

定義 (s–t 流)

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ が ***s–t 流***(フロー) $\overset{\text{def}}{\iff}$

- $0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A)$ **(容量制約)**
- $(\partial\varphi)(i) = 0 \qquad (i \in V \setminus \{s, t\})$ **(流量保存則)**

最大流問題 (Maximum Flow Problem)

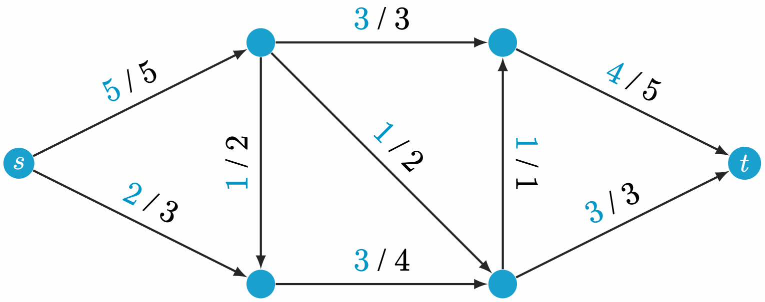
s–t 流 φ で**流量**

$$\mathrm{val}(\varphi) := (\partial\varphi)(s) = -(\partial\varphi)(t)$$

が最大のものを求めよ.

例

φ: 流量 / u: 容量



流量: 7 （実は最大流）

最大流問題: 線形計画問題として

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(s)} \varphi(a) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) = 0 && (i \in V \setminus \{s, t\}) \\
& 0 \le \varphi(a) \le u(a) && (a \in A)
\end{aligned}
$$

双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a \in A} u(a) y(a) \\
\text{s.t.} \quad & x(j) + y(a) \ge 1 && (a = sj \in \mathrm{Out}(s)) \\
& -x(i) + y(a) \ge 0 && (a = it \in \mathrm{In}(t)) \\
& x(j) - x(i) + y(a) \ge 0 && (a = ij \in A \setminus \mathrm{Out}(s) \cup \mathrm{In}(t)) \\
& y(a) \ge 0 && (a \in A)
\end{aligned}
$$

最大流問題: 線形計画問題として

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(s)} \varphi(a) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) = 0 \quad && (i \in V \setminus \{s, t\}) \\
& 0 \leq \varphi(a) \leq u(a) && (a \in A)
\end{aligned}
$$

双対問題 (D)

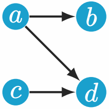
$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^V} \quad & \sum_{a = ij \in A} u(a) \max\{x(i) - x(j), 0\} \\
\text{s.t.} \quad & x(s) = 1 \\
& x(t) = 0
\end{aligned}
$$

最大流問題: 整数性

ネットワーク行列 有向グラフ $G = (V, A)$ に対し，
$V \times A$ 行列 B を

$$B_{i,a} := \begin{cases} +1 & (i \text{ は } a \text{ の始点}) \\ -1 & (i \text{ は } a \text{ の終点}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$(i \in V, a \in A)$ と定める．



$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

補題

ネットワーク行列は**完全単模行列**．

最大流問題: 整数性

最大流問題の係数行列は $\begin{bmatrix} \tilde{B} \\ I \end{bmatrix}$. ここで $\tilde{B}$ は B から s と t の行を除いたもの．ネットワーク行列の完全単模性より，この行列も完全単模．

完全単模行列と LP の整数性（第 1 回参照）から，以下の定理が従う．

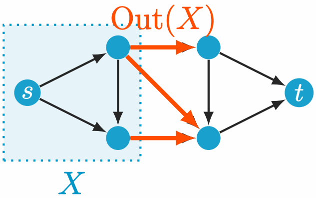
定理

最大流問題には整数双対最適解が存在する．さらに，枝容量 u が整数値のときは，整数値の最大流が存在する．

最大流最小カット定理

定義

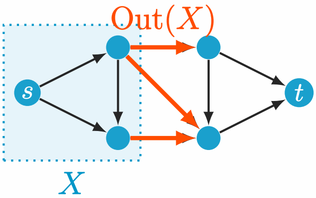
- $X \subseteq V$ が ***s*–*t* カット** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s \in X, t \notin X$
- *s*–*t* カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



最大流最小カット定理

定義

- $X \subseteq V$ が **s–t カット** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s \in X, t \notin X$
- s–t カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



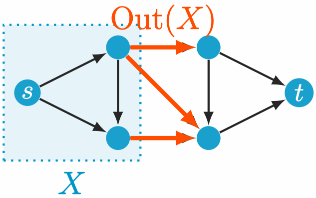
弱双対性 任意の s–t 流 φ と s–t カット X に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{val}(\varphi) \le u(\mathrm{Out}(X))$$

最大流最小カット定理

定義

- $X \subseteq V$ が **s–t カット** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s \in X, t \notin X$
- s–t カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



弱双対性 任意の s–t 流 φ と s–t カット X に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{val}(\varphi) \leq u(\mathrm{Out}(X))$$

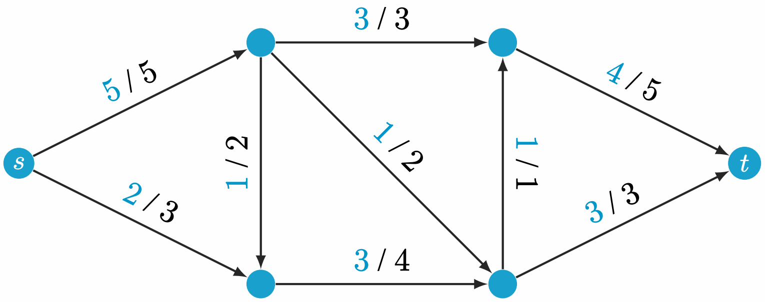
最大流最小カット定理 (Ford–Fulkerson, 1956; Danzig–Fulkerson, 1956)

$$\max_{\varphi:\, s\text{–}t\ \text{流}} \mathrm{val}(\varphi) = \min_{X:\, s\text{–}t\ \text{カット}} u(\mathrm{Out}(X))$$

次回，アルゴリズム的な証明を与える．

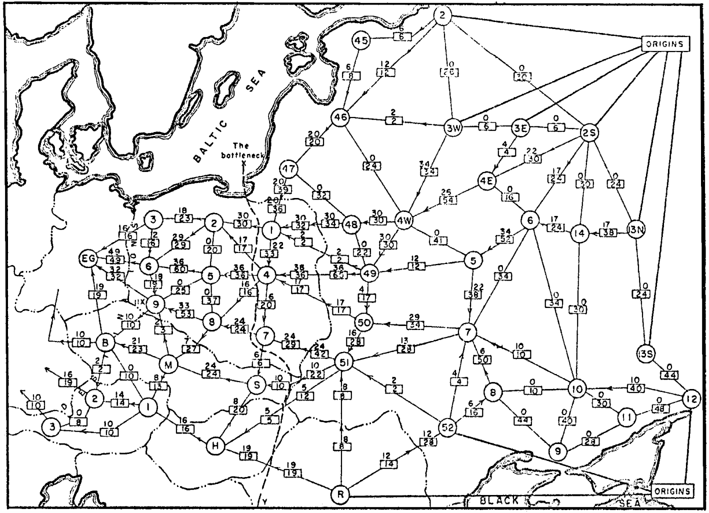
例

φ: 流量 / u: 容量



流量: 7 （実は最大流）

実例: 冷戦時代



出典 Harris, T.E., Ross, F.S. (1955): Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities. Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, California

目次

※アルゴリズムは次回

最大流を用いたモデリング

最大流を用いたモデリングの例として以下を紹介する:

1. Menger の定理 (点素・辺素パス問題)
2. 二部マッチング
3. Baseball Elimination
4. 最密部分グラフ問題 (密グラフ抽出)

最大流を用いたモデリング

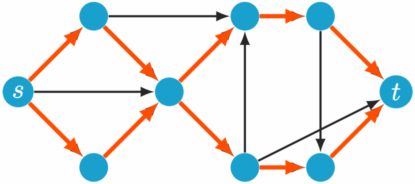
最大流を用いたモデリングの例として以下を紹介する:

1. **Menger の定理 (点素・辺素パス問題)**
2. 二部マッチング
3. Baseball Elimination
4. 最密部分グラフ問題 (密グラフ抽出)

辺素・点素パス問題

有向 s–t 辺素パス問題

入力: 有向グラフ $G = (V, A)$, $s, t \in V$
出力: 辺素 s–t パスの最大集合

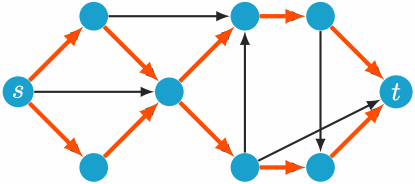


辺素 s–t パス

辺素・点素パス問題

有向 s–t 辺素パス問題

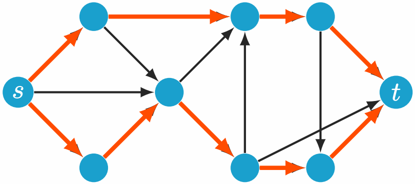
入力: 有向グラフ $G = (V, A)$, $s, t \in V$
出力: 辺素 s–t パスの最大集合



辺素 s–t パス

有向 s–t 点素パス問題

入力: 有向グラフ $G = (V, A)$, $s, t \in V$
出力: 点素 s–t パスの最大集合

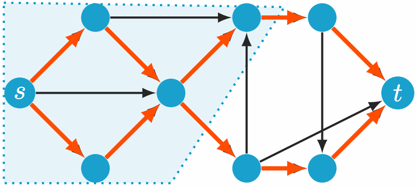


点素 s–t パス

Mengerの定理（有向・辺素 ver）

Mengerの定理（有向・辺素 ver）

辺素 s–t パスの最大本数
$= \min\{|\mathrm{Out}(X)| : s \in X \subseteq V \setminus t\}$



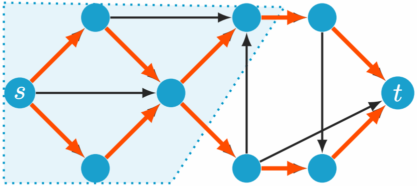
最小 s–t カット
$(|\mathrm{Out}(X)| = 2)$

辺素 s–t パスの本数 $\leq |\mathrm{Out}(X)|$ は自明．

Menger の定理（有向・辺素 ver）

Menger の定理（有向・辺素 ver）

辺素 s–t パスの最大本数
$= \min\{|\mathrm{Out}(X)| : s \in X \subseteq V \setminus t\}$



辺素 s–t パスの本数 $\leq |\mathrm{Out}(X)|$ は自明．

最小 s–t カット
$(|\mathrm{Out}(X)| = 2)$

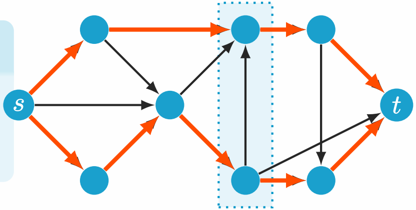
(証明) 枝容量 $u \equiv 1$ として s–t 最大流を考えると，整数の s–t 流は辺素 s–t パスに対応する．整数性より，整数の s–t 最大流が存在する．Menger の定理は最大流最小カット定理に他ならない． $\square$

Mengerの定理（有向・点素ver）

Mengerの定理（有向・点素ver）

点素 s–t パスの最大本数
$= \min\{|U| : U \subseteq V$ は s と t を分離 $\}$

点素 s–t パスの本数 $\leq |U|$ は自明.

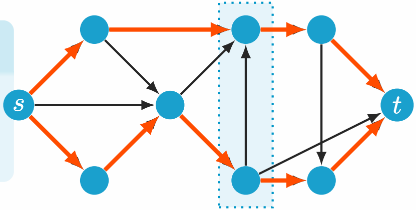


最小 s–t 分離集合 $(|U| = 2)$

Mengerの定理（有向・点素 ver）

Mengerの定理（有向・点素 ver）

点素 s–t パスの最大本数
$= \min\{|U| : U \subseteq V$ は s と t を分離$\}$



最小 s–t 分離集合 $(|U| = 2)$

点素 s–t パスの本数 $\leq |U|$ は自明．

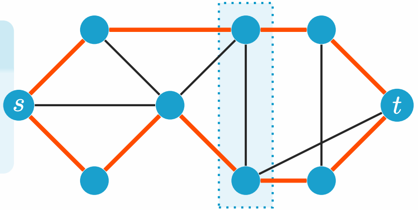
(証明) s, t 以外の各頂点を以下のようにに変換したネットワークで，最大流最小カット定理を適用すればよい．

Mengerの定理（無向・点素ver）

Mengerの定理には無向グラフ版もある．

無向 s–t 点素パス問題

入力: 無向グラフ $G=(V,E)$, $s,t\in V$
出力: 点素 s–t パスの最大集合



最小 s–t 分離集合 $(|U|=2)$

Mengerの定理（無向・点素ver）

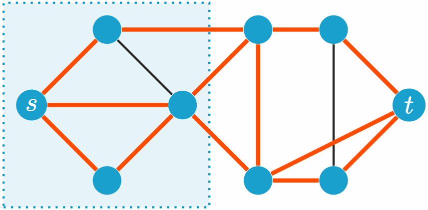
点素 s–t パスの最大本数 $=\min\{|U| : U\subseteq V$ は s と t を分離$\}$

(証明) 各枝を両方向に向きづけた有向グラフに対し，有向・点素Mengerを使う．

Mengerの定理（無向・辺素 ver）

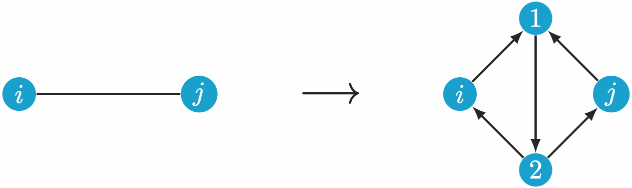
Mengerの定理（無向・辺素 ver）

辺素 s–t パスの最大本数
$= \min\{|E[X, \bar{X}]| : s \in X \subseteq V \setminus t\}$



最小 s–t カット (size $= 3$)

(証明) 各枝を以下のように変換した有向グラフで，有向・辺素 Menger を適用すればよい．



最大流を用いたモデリング

最大流を用いたモデリングの例として以下を紹介する:

1. Menger の定理 (点素・辺素パス問題)
2. **二部マッチング**
3. Baseball Elimination
4. 最密部分グラフ問題 (密グラフ抽出)

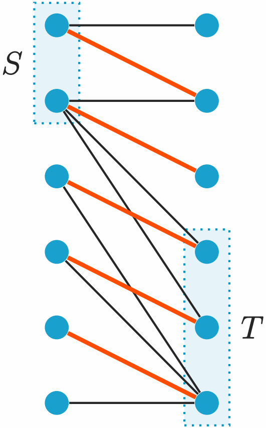
Kőnig–Egerváry の定理（復習）

$G = (V^+, V^-; E)$ を V^+, V^- を頂点集合とする二部グラフとする．

定義

$S \subseteq V^+, T \subseteq V^-$ が**頂点被覆**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の枝 $e = ij \in E$ に対し，$i \in S$ または $j \in T$.

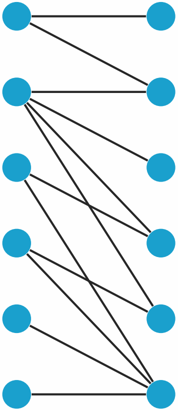


定理 (Kőnig–Egerváry)

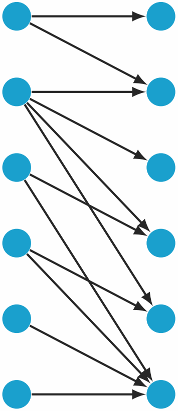
二部グラフ G において，次の最大最小定理が成り立つ．

$$\max_{M:\ \text{マッチング}} |M| = \min_{(S,T):\ \text{頂点被覆}} |S| + |T|$$

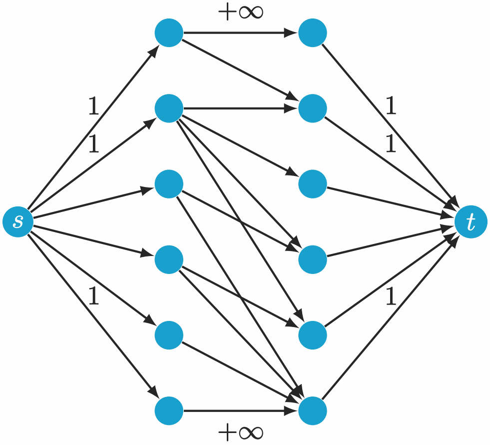
最大流最小カット $\Longrightarrow$ Kőnig–Egerváry



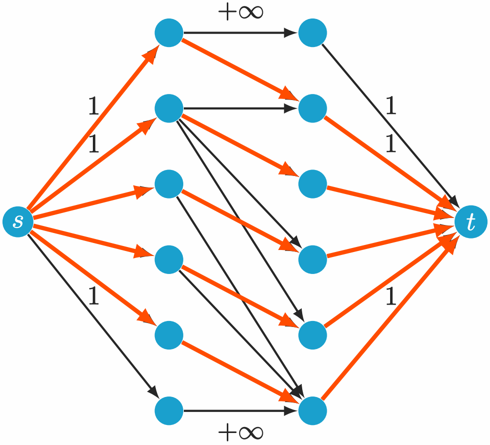
最大流最小カット $\implies$ Kőnig–Egerváry



最大流最小カット $\Longrightarrow$ Kőnig–Egerváry

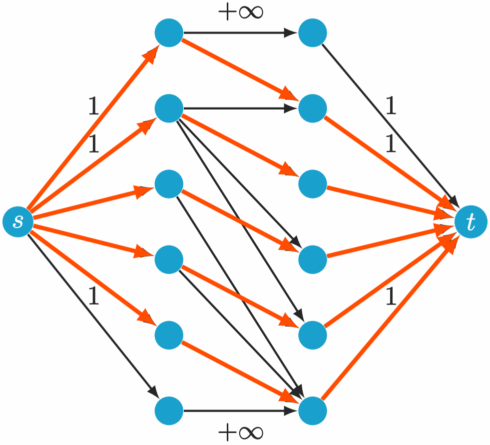


最大流最小カット $\Longrightarrow$ Kőnig–Egerváry



整数 s–t 流 $\longleftrightarrow$ マッチング

最大流最小カット $\Longrightarrow$ Kőnig–Egerváry



整数 s–t 流 $\longleftrightarrow$ マッチング

有限値の s–t カット $X \longleftrightarrow$ 頂点被覆 $S = V^{+} \setminus X, T = V^{-} \cap X$

X の容量 $= |S| + |T|$

最大流を用いたモデリング

最大流を用いたモデリングの例として以下を紹介する:

1. Mengerの定理 (点素・辺素パス問題)
2. 二部マッチング
3. **Baseball Elimination**
4. 最密部分グラフ問題 (密グラフ抽出)

Baseball Elimination

野球のリーグ優勝争いの例:

チーム	勝ち数	残り試合数	残りの対戦予定 NYY	BOS	TOR	BAL
New York Yankees (NYY)	93	8	–	1	6	1
Boston Red Sox (BOS)	89	4	1	–	0	3
Toronto Blue Jays (TOR)	88	7	6	0	–	1
Baltimore Orioles (BAL)	86	5	1	3	1	–

出典: D.P. Williamson *Network Flow Algorithms*

(簡単のため，試合結果に引き分けはないものとする)

定義

チーム k が**脱落している (eliminated)**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の残り試合結果において，チーム k より勝ち数の多いチームが存在する

Baseball Elimination

チーム	勝ち数	残り試合数	残りの対戦予定			
			NYY	BOS	TOR	BAL
New York Yankees (NYY)	93	8	–	1	6	1
Boston Red Sox (BOS)	89	4	1	–	0	3
Toronto Blue Jays (TOR)	88	7	6	0	–	1
Baltimore Orioles (BAL)	86	5	1	3	1	–

出典: D.P. Williamson *Network Flow Algorithms*

- BAL は脱落している．
  $\because$ BAL の現在の勝ち数 $86 +$ 残り試合数 $5 <$ NYY の現在の勝ち数 93 $\square$

Baseball Elimination

チーム	勝ち数	残り試合数	残りの対戦予定			
			NYY	BOS	TOR	BAL
New York Yankees (NYY)	93	8	–	1	6	1
Boston Red Sox (BOS)	89	4	1	–	0	3
Toronto Blue Jays (TOR)	88	7	6	0	–	1
Baltimore Orioles (BAL)	86	5	1	3	1	–

出典: D.P. Williamson *Network Flow Algorithms*

- BAL は脱落している．
  ∵ BAL の現在の勝ち数 $86 +$ 残り試合数 $5 <$ NYY の現在の勝ち数 93 □
- BOS は脱落している．
  ∵ BOS が残り全勝すると， $89 + 4 = 93$ 勝.
  もし NYY が 1 勝でもすれば，BOS を上回る．
  一方，NYY が全敗したとすると，TOR が $88 + 6 = 94$ 勝で BOS を上回る． □

Baseball Elimination

Baseball Elimination

入力: チーム集合 T, 現在の勝ち数 $w(i) \in \mathbb{Z}_+$ $(i \in T)$,
残り試合数 $g(i,j) \in \mathbb{Z}_+$ $(i,j \in T)$

出力: 特定のチーム $k \in T$ が脱落しているか否か

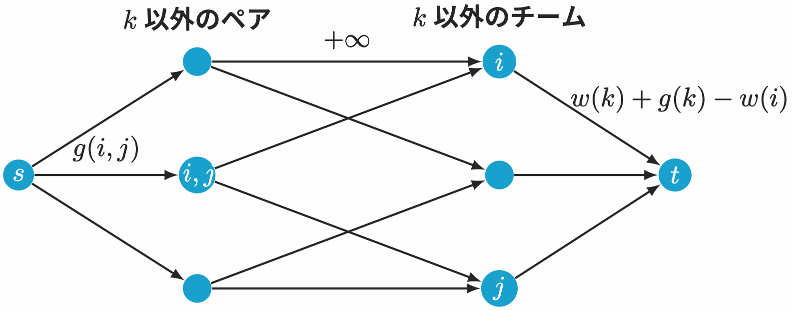
定理

Baseball Elimination は 1 回の最大流計算で解ける．

記号 $g(k) := \sum_{i \in T} g(k,i)$ ... チーム k の残り試合数

最大流への帰着

$g(i,j)$: i,j の残り試合数
$g(k)$: k の残り試合数
$w(i)$: i の現在の勝ち数



補題

$w(k)+g(k)-w(i) \geq 0$ $(i \in T \setminus k)$ とする．このとき，
s から出る全ての枝の容量を飽和する流が存在 $\Longleftrightarrow$ k は脱落していない

最大流を用いたモデリング

最大流を用いたモデリングの例として以下を紹介する:

1. Menger の定理 (点素・辺素パス問題)
2. 二部マッチング
3. Baseball Elimination
4. **最密部分グラフ問題 (密グラフ抽出)**

最密部分グラフ問題

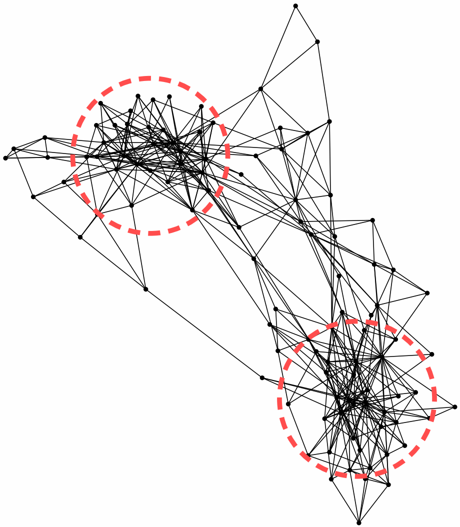
最密部分グラフ問題

入力 無向グラフ $G = (V, E)$,
枝重み $w : E \to \mathbb{R}_+$

出力 密度

$$\frac{w(E[S])}{|S|}$$

が最大となる頂点部分集合 $\emptyset \neq S \subseteq V$



引用:『組合せ最適化から機械学習へ：劣モジュラ最適化とグラフマイニング』サイエンス社

最小カットへの帰着

固定された $\gamma \geq 0$ に対し，

$$\frac{w(E[S])}{|S|} > \gamma$$ を満たす S が存在するか？ (存在するなら求めよ)

を解けばよい．（γ に関して二分探索）

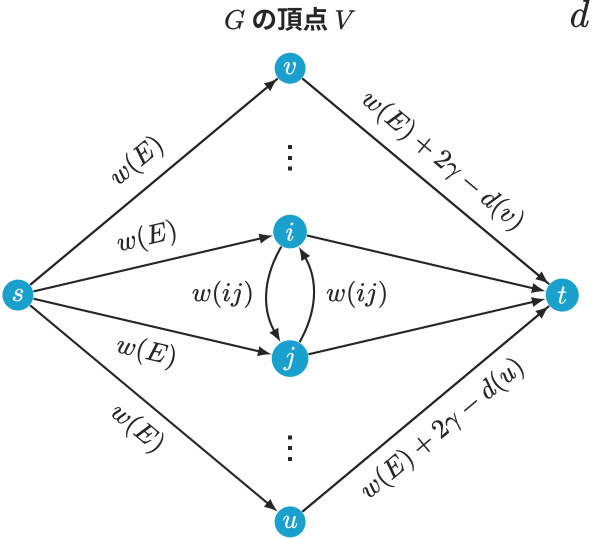
つまり最小化問題

$$\min_{S \subseteq V} [\gamma|S| - w(E[S])] < 0$$

を解けばよい．

方針 この最小化問題を**最小 s–t カット**で表現する

最小カットへの帰着



$d(v) := w(\delta(v))$ ... 重み付き次数

目次

1. **最大流問題**
   - 定義
   - 最大流最小カット定理
   - 整数性
2. **最大流を用いたモデリング**
   - Menger の定理
   - 二部マッチング
   - Baseball Elimination
   - 最密部分グラフ

※アルゴリズムは次回