組合せ最適化特論
第 5 回（最大流②）

担当: **相馬 輔**

2025/12/16

目次

目次

1. Ford–Fulkerson 法
   - 残余ネットワーク
   - 最大流最小カット定理の証明
   - 反復回数

2. Edmonds–Karp 法
   - Edmonds–Karp 法
   - 距離ラベルを用いた解析
   - まとめ

最大流問題（復習）

$G = (V, A)$: 有向グラフ

定義

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ に対し，その**境界** $\partial\varphi : V \to \mathbb{R}$ を

$$(\partial\varphi)(i) := \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) \qquad (i \in V)$$

と定義する．ここで，$\mathrm{In}(i)$, $\mathrm{Out}(i)$ はそれぞれ頂点 i に入る枝，出る枝の集合．

※ $\delta^+(i)$, $\delta^-(i)$ と表記する本もある．

最大流問題（復習）

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $u : A \to \mathbb{R}_+$: 枝容量関数
$s, t \in V$: 始点, 終点

定義 (s–t 流)

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ が s–t 流（フロー） $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A)$ **（容量制約）**
- $(\partial\varphi)(i) = 0 \qquad (i \in V \setminus \{s, t\})$ **（流量保存則）**

最大流問題（復習）

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $u : A \to \mathbb{R}_+$: 枝容量関数
$s, t \in V$: 始点, 終点

定義 (s–t 流)

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ が ***s–t 流***（フロー） $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A)$ **（容量制約）**
- $(\partial\varphi)(i) = 0 \qquad (i \in V \setminus \{s, t\})$ **（流量保存則）**

最大流問題 (Maximum Flow Problem)

s–t 流 φ で**流量**

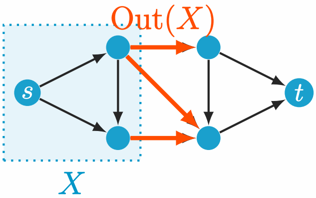
$$\mathrm{val}(\varphi) := (\partial\varphi)(s) = -(\partial\varphi)(t)$$

が最大のものを求めよ．

最大流最小カット定理

定義

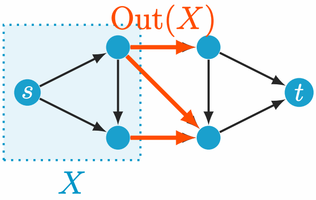
- $X \subseteq V$ が **s–t カット** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s \in X, t \notin X$
- s–t カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



最大流最小カット定理

定義

- $X \subseteq V$ が ***s–t* カット** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $s \in X, t \notin X$
- s–t カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



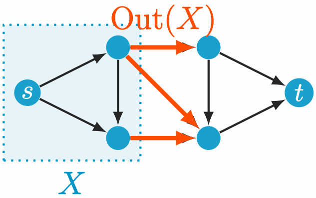
弱双対性 任意の s–t 流 φ と s–t カット X に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{val}(\varphi) \leq u(\mathrm{Out}(X))$$

最大流最小カット定理

定義

- $X \subseteq V$ が ***s*–*t* カット** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $s \in X, t \notin X$
- s–t カット X の**容量**: $u(\mathrm{Out}(X)) = \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a)$



弱双対性 任意の s–t 流 φ と s–t カット X に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{val}(\varphi) \leq u(\mathrm{Out}(X))$$

最大流最小カット定理 (Ford–Fulkerson, 1956; Danzig–Fulkerson, 1956)

$$\max_{\varphi:\, s\text{–}t \text{ 流}} \mathrm{val}(\varphi) = \min_{X:\, s\text{–}t \text{ カット}} u(\mathrm{Out}(X))$$

残余ネットワーク

定義 (残余ネットワーク)

- s–t 流 φ に対し，**残余ネットワーク** $G_\varphi = (V, A_\varphi)$ を次のように定める:

$$A_\varphi := A_\varphi^{\mathrm{up}} \cup A_\varphi^{\mathrm{lo}}$$

$$A_\varphi^{\mathrm{up}} := \{a \in A : \varphi(a) < u(a)\} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を増やせる枝}$$

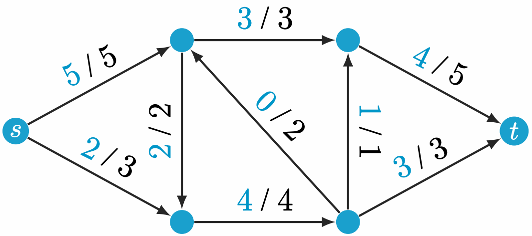
$$A_\varphi^{\mathrm{lo}} := \{a^{-1} : a \in A,\ \varphi(a) > 0\} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を減らせる枝}$$

ここで a^{-1} は a の逆向き枝．

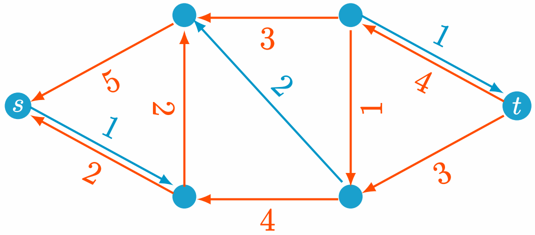
- 残余ネットワークの枝容量 $c_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}_+$ を次のように定める:

$$c_\varphi(a) := \begin{cases} u(a) - \varphi(a) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ \varphi(a^{-1}) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を増減できる余裕量}$$

例



元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



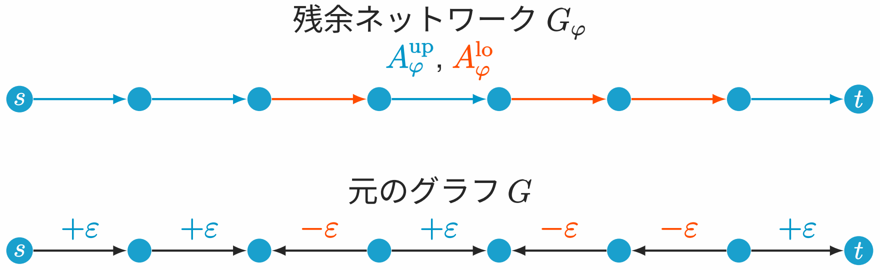
残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

増加道

定義

残余ネットワーク上の s–t パスを φ に対する**増加道**と呼ぶ．

観察 増加道があると，それに沿って流量を増やせる．



増加道に沿った流の更新

増加道 P に対し，次の φ^+ を考える:

$$\varphi^+(a) := \begin{cases} \varphi(a) + \varepsilon & (a \in P \cap A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ \varphi(a) - \varepsilon & (a^{-1} \in P \cap A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \\ \varphi(a) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで $\varepsilon = \min_{a \in P} c_\varphi(a)$ である．このとき，φ^+ は s–t 流であり，その流量は $\mathrm{val}(\varphi^+) = \mathrm{val}(\varphi) + \varepsilon$．

増加道による最大流の特徴づけ

補題

- s–t 流 φ が最大流 $\iff$ φ に対する増加道が存在しない．
- φ に対する増加道が存在しないとき，G_φ において s から到達可能な頂点集合 $s \in X \subseteq V \setminus t$ は $\mathrm{val}(\varphi) = u(\mathrm{Out}(X))$ を満たす．

cf. 弱双対性 $\mathrm{val}(\varphi) \leq u(\mathrm{Out}(X))$

最大二部マッチングの増加道による特徴づけ（第２回）の一般化

補題の証明

増加道が存在しない $\Longrightarrow$ φ は最大流:

X を G_φ において s から到達可能な頂点集合とする．すると，G_φ において X から出る枝は存在しない．

ゆえに，以下が成り立つ:

- G において X から出る枝 $a \in \mathrm{Out}(X)$ に対し，$\varphi(a) = u(a)$
- G において X に入る枝 $a \in \mathrm{In}(X)$ に対し，$\varphi(a) = 0$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(\varphi) &= \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(X)} \varphi(a) \\ &= \sum_{a \in \mathrm{Out}(X)} u(a) - 0 = u(\mathrm{Out}(X)).\end{aligned}$$

弱双対が等号で成り立つので，φ は最大流． □

Ford–Fulkerson 法

補題から直ちに次のアルゴリズムが得られる．

Ford–Fulkerson 法

$\varphi \equiv 0.$

while 残余ネットワーク G_φ に増加道 P が存在：

$\quad \varepsilon \leftarrow \min_{a \in P} c_\varphi(a)$ ……………………………… P に沿って増加できる最大の ε

$$\quad \varphi(a) \leftarrow \begin{cases} \varphi(a) + \varepsilon & a \in P \cap A_\varphi^{\mathrm{up}} \\ \varphi(a) - \varepsilon & a^{-1} \in P \cap A_\varphi^{\mathrm{lo}} \\ \varphi(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

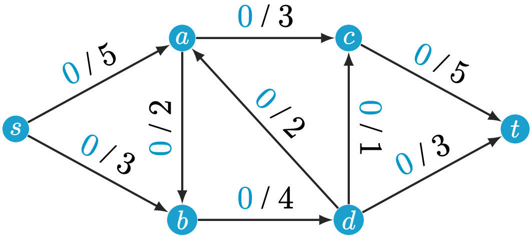
$X := G_\varphi$ において s から到達可能な頂点集合

return φ, X

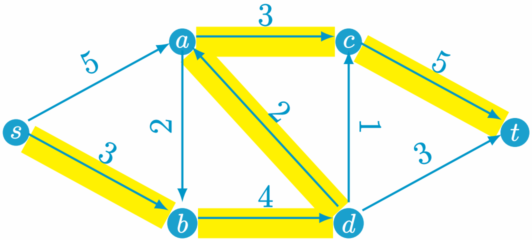
定理 (Ford–Fulkerson, 1957)

Ford–Fulkerson 法は停止した場合，最大流と最小カットを返す．

例



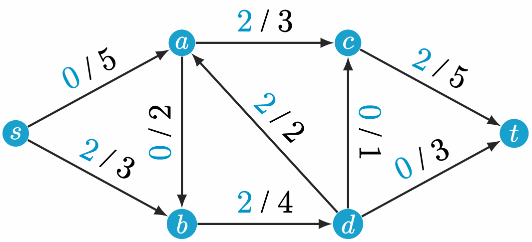
元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



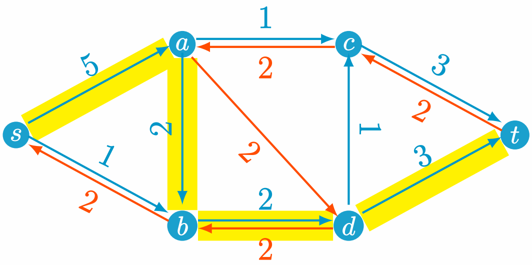
残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

流量: 0

例



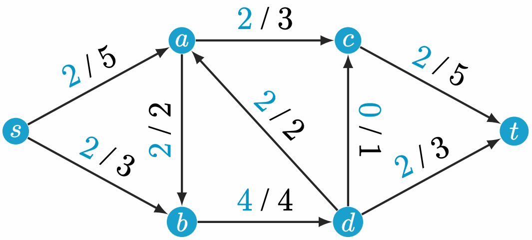
元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



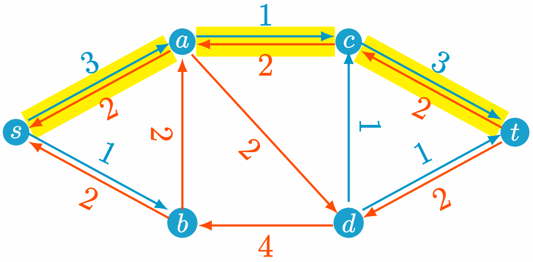
残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

流量: 2

例



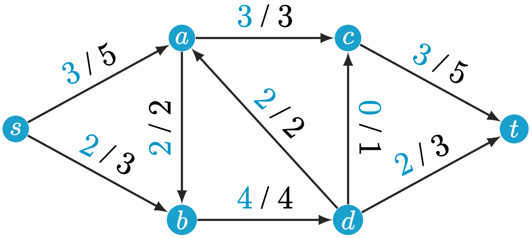
元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

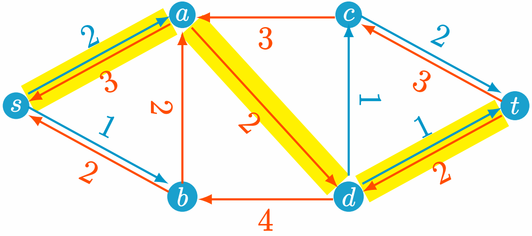
流量: 4

例



元のネットワーク G

φ: 流量 / u: 容量

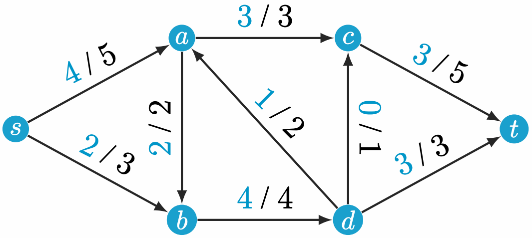


残余ネットワーク G_φ

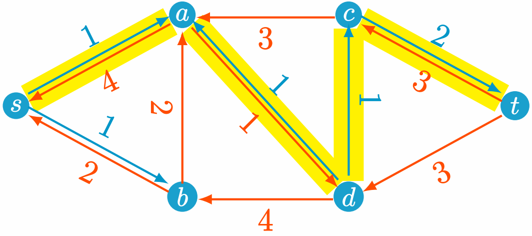
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

流量: 5

例



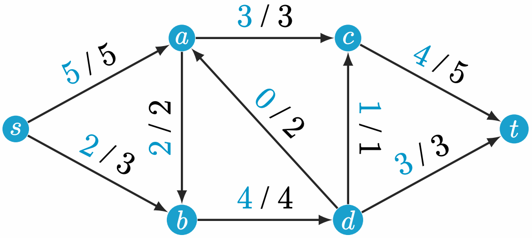
元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



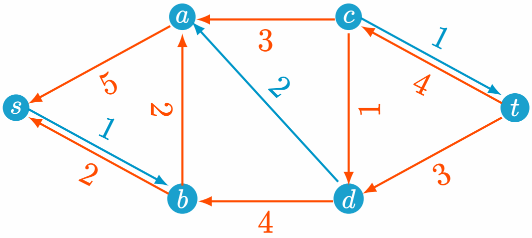
残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

流量: 6

例



元のネットワーク G
φ: 流量 / u: 容量



残余ネットワーク G_φ
A_φ^{up}, A_φ^{lo}

流量: 7

【終了】

Ford–Fulkerson 法

残余ネットワークの構築・増加道の探索・流の更新: $O(m)$ 時間

$(m = |A|)$

反復回数

- **枝容量が整数値**のとき: 各反復で流量が少なくとも 1 増加．したがって，最大流量を F とすると，高々 F 回の反復．
$\longrightarrow$ 全体では $O(mF)$ 時間（**擬多項式時間**）
- 枝容量が無理数値のとき: 増加道の選び方によっては，有限回で停止せず，かつ最大でない流に収束してしまう例がある

[Ford–Fulkerson, 1962]

目次

Edmonds–Karp 法

Ford–Fulkerson 法において，**枝数が最小の増加道**を選ぶ．

たとえば，幅優先探索で s–t パスを探索すればよい．

定理 (Edmonds–Karp, 1972)

任意の枝容量に対し，Edmonds–Karp 法は $O(mn)$ 回の反復で終了する．したがって，$O(m^2n)$ 時間で最大流と最小カットを求められる．

強多項式時間

$(n = |V|, m = |A|)$

Edmonds–Karp 法の解析

φ: Edmonds–Karp 法の途中の流
P: 選ばれた φ 増加道
φ^+: P に沿って更新した流

補題 (距離ラベルの単調性)

$d(i) := G_\varphi$ における頂点 i から t までの最短距離（枝数）
$d^+(i) := G_{\varphi^+}$ における頂点 i から t までの最短距離（枝数）
とする．
このとき，任意の頂点 $i \in V$ に対し，$d(i) \leq d^+(i)$ が成り立つ．

Edmonds–Karp 法の解析

(証明) 背理法．$d(i) > d^+(i)$ となる頂点 i が存在すると仮定する．そのような頂点 i の中で $d^+(i)$ が最小のものを取る．$(i \neq t)$

j: G_{φ^+} において i から t までの最短路における i の直後の頂点

Claim. $ij \notin A_\varphi$
(∵) もし $ij \in A_\varphi$ ならば，

$$d(i) \leq d(j) + 1 \leq d^+(j) + 1 = d^+(i) < d(i)$$

となり矛盾．　□

Edmonds–Karp 法の解析

Claim. $ij \notin A_\varphi$

したがって，

- ji が G_φ に存在し，その逆向き枝 ij は存在しない．
- また，更新後の G_{φ^+} に ij が現れているので，ji は G_φ の最短路 P に含まれていたことになる．よって，$d(j) = d(i) + 1$．

すると，

$$
\begin{aligned}
d(i) &= d(j) - 1 && \text{(上式を移項)} \\
&\le d^+(j) - 1 && (d(j) \le d^+(j)) \\
&= d^+(i) - 2 && (j \text{ は } G_{\varphi^+} \text{ において } i \text{ の直後の頂点})
\end{aligned}
$$

となり，そもそもの仮定 $d(i) > d^+(i)$ に矛盾．□

Edmonds–Karp 法の解析

定理 (Edmonds–Karp)

任意の枝容量に対し，Edmonds–Karp 法は $O(mn)$ 回の反復で終了する．したがって，$O(m^2n)$ 時間で最大流と最小カットを求められる．

(証明) $ij \in A_\varphi$ が，更新後に $ij \notin A_{\varphi^+}$ となったとき，ij は**飽和**したという．

- 各反復では，P の少なくとも 1 本の枝が飽和する．飽和した枝 ij について $d(i) = d(j) + 1$ が成り立つ．

Edmonds–Karp 法の解析

定理 (Edmonds–Karp)

任意の枝容量に対し，Edmonds–Karp 法は $O(mn)$ 回の反復で終了する．したがって，$O(m^2n)$ 時間で最大流と最小カットを求められる．

(証明) $ij \in A_\varphi$ が，更新後に $ij \notin A_{\varphi^+}$ となったとき，ij は**飽和**したという．

- 各反復では，P の少なくとも 1 本の枝が飽和する．飽和した枝 ij について $d(i) = d(j) + 1$ が成り立つ．
- 一度飽和した ij が再び飽和するには，その間に ji が一度は最短路に含まれる必要がある．そのときの距離ラベルに関して，$d(j) = d(i) + 1$ が成り立つ．

Edmonds–Karp 法の解析

定理 (Edmonds–Karp)

任意の枝容量に対し，Edmonds–Karp 法は $O(mn)$ 回の反復で終了する．したがって，$O(m^2 n)$ 時間で最大流と最小カットを求められる．

(証明) $ij \in A_\varphi$ が，更新後に $ij \notin A_{\varphi^+}$ となったとき，ij は**飽和**したという．

- 各反復では，P の少なくとも 1 本の枝が飽和する．飽和した枝 ij について $d(i) = d(j) + 1$ が成り立つ．
- 一度飽和した ij が再び飽和するには，その間に ji が一度は最短路に含まれる必要がある．そのときの距離ラベルに関して，$d(j) = d(i) + 1$ が成り立つ．
- 距離ラベル $d(i) \leq n$ or $d(i) = +\infty$ (i から t へ到達不能の場合)

Edmonds–Karp 法の解析

定理 (Edmonds–Karp)

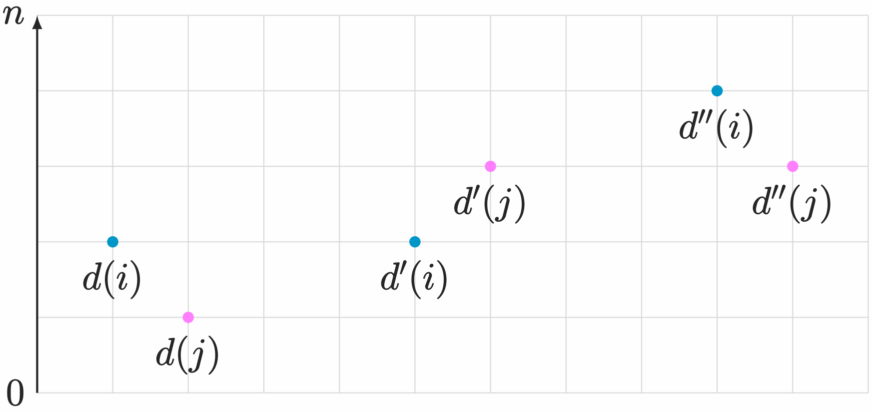
任意の枝容量に対し，Edmonds–Karp 法は $O(mn)$ 回の反復で終了する．したがって，$O(m^2n)$ 時間で最大流と最小カットを求められる．

(証明) $ij \in A_\varphi$ が，更新後に $ij \notin A_{\varphi^+}$ となったとき，ij は**飽和**したという．

- 各反復では，P の少なくとも 1 本の枝が飽和する．飽和した枝 ij について $d(i) = d(j) + 1$ が成り立つ．
- 一度飽和した ij が再び飽和するには，その間に ji が一度は最短路に含まれる必要がある．そのときの距離ラベルに関して，$d(j) = d(i) + 1$ が成り立つ．
- 距離ラベル $d(i) \le n$ or $d(i) = +\infty$ (i から t へ到達不能の場合)

よって，距離ラベルの単調性と合わせると，各枝は高々 $n/2$ 回飽和しうる．ゆえに全体の反復は $O(mn)$ 回． □

Edmonds–Karp 法の解析



ij が飽和したとき
$d(i) = d(j) + 1$

ji が最短路に含まれたとき
$d'(j) = d'(i) + 1$

ij が再度飽和したとき
$d''(i) = d''(j) + 1$

まとめ

最大流問題

- 最大流最小カット定理，整数性
- Ford–Fulkerson 法: 枝容量が整数値のとき $O(mF)$ 時間
- Edmonds–Karp 法: $O(m^2 n)$ 時間

その他の最大流アルゴリズム

- Dinitz (1970): $O(mn^2)$ 時間
  動的木を用いると $O(mn \log n)$ 時間 (Sleator–Tarjan, 1983)

- プッシュ・再ラベル (Goldberg–Tarjan, 1988): $O(n^2\sqrt{m})$ 時間
  動的木を用いると $O(mn \log(n^2/m))$ 時間