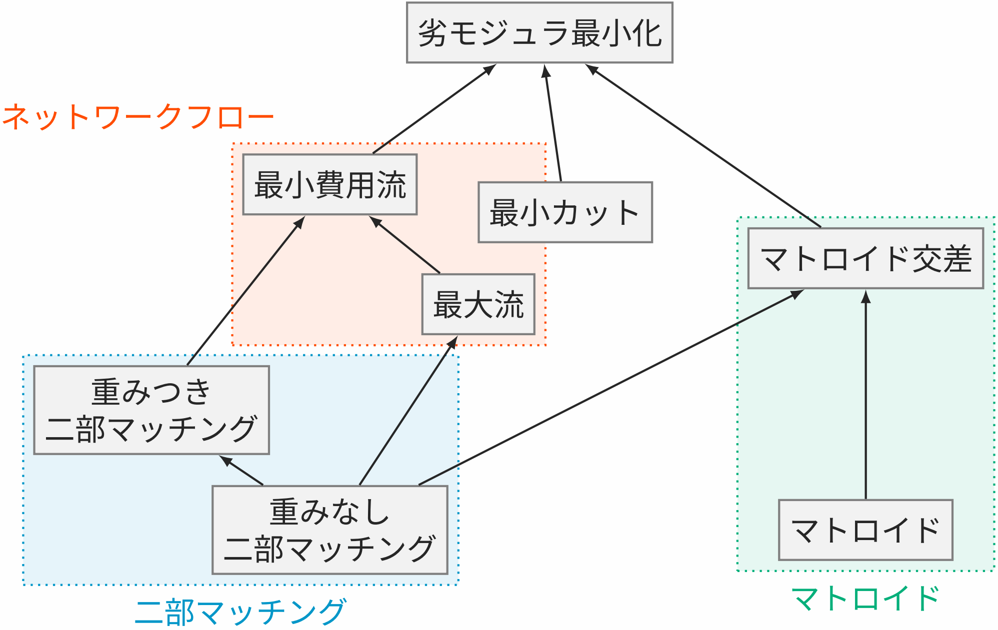
組合せ最適化特論
第 6 回（最小費用流）

担当: **相馬 輔**

2025/12/23


劣モジュラ最小化
ネットワークフロー
最小費用流
最小カット
最大流
マトロイド交差
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド
二部マッチング
マトロイド

各回の内容（予定） I

1. (10/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）
2. (10/30) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
3. (11/6) 二部マッチング②（最短路問題の復習，逐次最短路法と主双対法，最適性基準からの見方）
4. (12/9) 最大流① （定式化，最大流最小カット定理，応用例）
5. (12/16) 最大流②（残余ネットワーク，Ford–Fulkerson 法，Edmonds–Karp のアルゴリズム）
6. **(12/23) 最小費用流（定式化，輸送問題，最大流との関係，逐次最短路法，容量スケーリング法）**

各回の内容（予定） II

(1/1) 休み

7. (1/8) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）

(1/15) 休み

8. (1/22) マトロイド交差①（定義，Edmonds の最大最小定理，応用例）
9. (1/29) マトロイド交差②（交換可能性グラフ，増加道アルゴリズム）
10. (2/5) 劣モジュラ関数①（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）
11. (2/12) 劣モジュラ関数②（劣モジュラ最大化，近似アルゴリズム，貪欲法）

(2/19) 予備

目次

目次

境界

$G = (V, A)$: 有向グラフ

定義

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ に対し，その**境界** $\partial\varphi : V \to \mathbb{R}$ を

$$(\partial\varphi)(i) := \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) \qquad (i \in V)$$

と定義する．ここで，$\mathrm{In}(i)$, $\mathrm{Out}(i)$ はそれぞれ頂点 i に入る枝，出る枝の集合．

※ $\delta^+(i)$, $\delta^-(i)$ と表記する本もある．

b流

$G = (V, A)$: 有向グラフ, $u : A \to \mathbb{R}_+$: 枝容量関数,
$b : V \to \mathbb{R}$ **with** $b(V) = 0$

定義 (b流)

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ が **(実行可能) b流** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A)$ **(容量制約)**
- $(\partial\varphi)(i) = b(i) \qquad (i \in V)$ **(境界条件)**

解釈

- $b(i) > 0$: 供給点，湧き出し口
- $b(i) = 0$: 流量保存する頂点
- $b(i) < 0$: 需要点，吸い込み口

特に，$b \equiv 0$ のとき，φ は**循環流 (circulation)** と呼ばれる．

最小費用流問題

- $G=(V,A)$: 有向グラフ
- $u:A\to\mathbb{R}_+$: 枝容量関数
- $b:V\to\mathbb{R}$ with $b(V)=0$
- $c:A\to\mathbb{R}$: **枝費用関数**

最小費用流問題 (Minimum Cost Flow Problem)

b 流 φ で費用 $c(\varphi):=\sum_{a\in A}c(a)\varphi(a)$ が最小のものを求めよ．
（もしくは，b 流が存在しないことを示せ）

最小費用流: 線形計画問題として

最小費用流の方が LP として美しい形になる．

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^\top \varphi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) = b(i) && (i \in V) \\
& 0 \leq \varphi(a) \leq u(a) && (a \in A)
\end{aligned}
$$

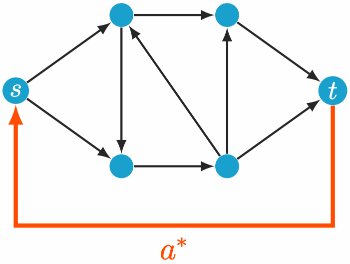
双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^V, y \in \mathbb{R}^A_+} \quad & \sum_{i \in V} b(i)x(i) - \sum_{a \in A} u(a)y(a) \\
\text{s.t.} \quad & x(i) - x(j) - y(a) \leq c(a) && (a = ij \in A) \\
& y(a) \geq 0 && (a \in A)
\end{aligned}
$$

最大流 ⊂ 最小費用流

s–t 最大流は最小費用流問題の特殊ケース．

G に枝 $a^* = ts$ を追加した有向グラフを G' とし，
その上の循環流を考える．



容量

$$u'(a) := \begin{cases} +\infty & (a = a^*) \\ u(a) & (a \in A) \end{cases}$$

枝費用

$$c(a) := \begin{cases} -1 & (a = a^*) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とすればよい．

最短路問題 $\subset$ 最小費用流

最短路問題は最小費用流問題の特殊ケース．

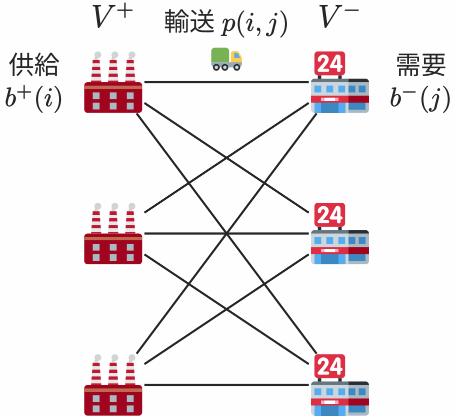
- 容量: $u \equiv +\infty$
- 境界: $b(i) = \begin{cases} +1 & (i = s) \\ -1 & (i = t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$
- 費用 $c = \ell$ (最短路問題の枝長)

Hitchcock 型輸送問題

$G = (V^+, V^-; E)$: 二部グラフ
$b^+ : V^+ \to \mathbb{R}_+$: 供給関数, $b^- : V^- \to \mathbb{R}_+$: 需要関数 with $b^+(V^+) = b^-(V^-)$
$c : E \to \mathbb{R}$: 枝費用関数

Hitchcock 型輸送問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{(i,j)\in E} c(i,j)p(i,j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in\Gamma(i)} p(i,j) = b^+(i) \quad (i \in V^+) \\ & \sum_{i\in\Gamma(j)} p(i,j) = b^-(j) \quad (j \in V^-) \\ & p(i,j) \geq 0 \quad ((i,j) \in E) \end{aligned}$$



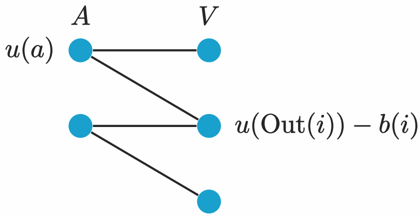
輸送問題と最小費用流

補題

n 頂点, m 枝の最小費用流問題は，$n+m$ 頂点, $2m$ 枝の Hitchcock 型輸送問題に帰着できる．

(証明) $G' = (V^+, V^-; E)$, b^+, b^-, c を次のように構成する:

- $V^+ := A$, $V^- := V$
- $E = \bigcup_{a=ij\in A}\{(a,i),(a,j)\}$
- $b^+(a) := u(a) \quad (a \in V^+)$
  $b^-(i) := u(\mathrm{Out}(i)) - b(i) \quad (i \in V^-)$
- $c(a,i) := 0$, $c(a,j) := c(a) \quad (a = ij \in A)$



$b^+(V^+) = u(A) = \sum_{i\in V}(u(\mathrm{Out}(i)) - b(i)) = b^-(V^-)$ より，これは Hitchcock 型輸送問題を定める．

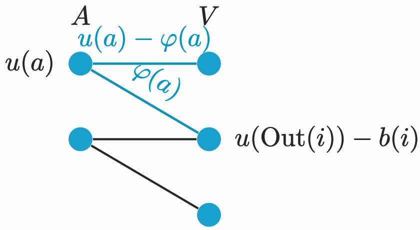
輸送問題と最小費用流

補題

n 頂点, m 枝の最小費用流問題は，$n+m$ 頂点, $2m$ 枝の Hitchcock 型輸送問題に帰着できる．

(証明) (G,u) 上の b 流 φ に対し，

$$p(a,i) := u(a) - \varphi(a)$$
$$p(a,j) := \varphi(a)$$



$(a = ij \in A)$ と定めると，p は輸送問題の実行可能解であり，$c'(p) = c(\varphi)$.

逆に，輸送問題の実行可能解 p に対し，

$$\varphi(a) := p(a,j) \quad (a = ij \in A)$$

と定めると，φ は (G,u) 上の b 流であり，$c(\varphi) = c'(p)$.

実行可能性: Gale の定理

定理

（もし存在するならば）b 流は 1 回の最大流問題で求められる．

(証明) 右図のグラフ $G' = (V', A')$ と枝容量を考える:

$$u'(a) = \begin{cases} u(a) & (a \in A) \\ b(i) & (a = si, b(i) > 0) \\ -b(i) & (a = it, b(i) < 0) \end{cases}$$

(G', u') の流量 $b(V^+)$ の s–t 流 $\longleftrightarrow$ (G, u) の b 流 □

実行可能性: Gale の定理

定理

（もし存在するならば）b 流は 1 回の最大流問題で求められる．

(証明) 右図のグラフ $G' = (V', A')$ と枝容量を考える:

$$u'(a) = \begin{cases} u(a) & (a \in A) \\ b(i) & (a = si, b(i) > 0) \\ -b(i) & (a = it, b(i) < 0) \end{cases}$$

(G', u') の流量 $b(V^+)$ の s–t 流 $\longleftrightarrow$ (G, u) の b 流 $\square$

系 (Gale, 1957)

b 流が存在 $\iff b(X) \leq u(\mathrm{Out}_G(X)) \quad (X \subseteq V)$

(証明) (G' の s–t カット容量) $\geq b(V^+)$ を書き換える． $\square$

残余ネットワーク

b 流に関しても残余ネットワークの定義は同じ.

定義 (残余ネットワーク)

- b 流 φ に対し，**残余ネットワーク** $G_\varphi = (V, A_\varphi)$ を次のように定める:

$$A_\varphi := A_\varphi^{\mathrm{up}} \cup A_\varphi^{\mathrm{lo}}$$

$$A_\varphi^{\mathrm{up}} := \{a \in A : \varphi(a) < u(a)\} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を増やせる枝}$$

$$A_\varphi^{\mathrm{lo}} := \{a^{-1} : a \in A,\ \varphi(a) > 0\} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を減らせる枝}$$

  ここで a^{-1} は a の逆向き枝.

- 残余ネットワークの枝容量 $c_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}_+$ を次のように定める:

$$c_\varphi(a) := \begin{cases} u(a) - \varphi(a) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ \varphi(a^{-1}) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \varphi \text{ を増減できる余裕量}$$

残余ネットワークを用いた流の更新

φ: b 流

残余ネットワーク G_φ 上のパス or 閉路 Q に沿って流を更新する:

$$\varphi^+(a) := \begin{cases} \varphi(a) + \varepsilon & (a \in Q \cap A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ \varphi(a) - \varepsilon & (a^{-1} \in Q \cap A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \\ \varphi(a) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon \leq \min_{a \in Q} c_\varphi(a)$.

残余ネットワークを用いた流の更新

φ: b 流

残余ネットワーク G_φ 上のパス or 閉路 Q に沿って流を更新する:

$$\varphi^+(a) := \begin{cases} \varphi(a) + \varepsilon & (a \in Q \cap A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ \varphi(a) - \varepsilon & (a^{-1} \in Q \cap A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \\ \varphi(a) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon \leq \min_{a \in Q} c_\varphi(a)$.

観察

- Q が s–t パスならば，φ^+ は $b' = b + \varepsilon(\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_t)$ に関する b' 流.
- Q が閉路ならば，φ^+ は b 流.

残余ネットワーク

さらに残余ネットワークの枝長 $\ell_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\ell_\varphi(a) := \begin{cases} c(a) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ -c(a^{-1}) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \end{cases}$$

観察 Q に沿った流の更新により，費用は次のように変化する:

$$c(\varphi^+) = c(\varphi) + \varepsilon \ell_\varphi(Q)$$

残余ネットワーク

さらに残余ネットワークの枝長 $\ell_\varphi : A_\varphi \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\ell_\varphi(a) := \begin{cases} c(a) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{up}}) \\ -c(a^{-1}) & (a \in A_\varphi^{\mathrm{lo}}) \end{cases}$$

観察 Q に沿った流の更新により，費用は次のように変化する:

$$c(\varphi^+) = c(\varphi) + \varepsilon \ell_\varphi(Q)$$

(復習) $p : V \to \mathbb{R}$ が枝長 $\ell : A \to \mathbb{R}$ に関する**ポテンシャル**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $p(i) - p(j) \le \ell(a) \quad (a = ij \in A)$

負閉路最適性条件

定理 (Klein (1967), Ford–Fulkerson (1962))

b 流 φ に対し，次の 3 条件は同値:

1. φ は最小費用流
2. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）負閉路が存在しない
3. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）ポテンシャルが存在

最小重み完全マッチングの最適性条件（第 3 回）の一般化．

負閉路最適性条件

定理 (Klein (1967), Ford–Fulkerson (1962))

b 流 φ に対し，次の 3 条件は同値:

1. φ は最小費用流
2. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）負閉路が存在しない
3. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）ポテンシャルが存在

最小重み完全マッチングの最適性条件（第 3 回）の一般化．

(証明) ① $\Longrightarrow$ ②: 負閉路 C に沿って φ を更新すると，φ^+ は b 流で，
$c(\varphi^+) = c(\varphi) + \varepsilon \ell_\varphi(C) < c(\varphi)$ となり矛盾．

負閉路最適性条件

定理 (Klein (1967), Ford–Fulkerson (1962))

b 流 φ に対し，次の 3 条件は同値:

1. φ は最小費用流
2. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）負閉路が存在しない
3. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）ポテンシャルが存在

最小重み完全マッチングの最適性条件（第 3 回）の一般化．

(証明) ① $\Longrightarrow$ ②: 負閉路 C に沿って φ を更新すると，φ^+ は b 流で，
$c(\varphi^+) = c(\varphi) + \varepsilon \ell_\varphi(C) < c(\varphi)$ となり矛盾．

② $\Longleftrightarrow$ ③: 最短路問題（第 3 回）でやった

負閉路最適性条件

定理 (Klein (1967), Ford–Fulkerson (1962))

b 流 φ に対し，次の 3 条件は同値:

1. φ は最小費用流
2. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）負閉路が存在しない
3. 残余ネットワーク G_φ に（ℓ_φ に関する）ポテンシャルが存在

最小重み完全マッチングの最適性条件（第 3 回）の一般化．

(証明) ① $\Longrightarrow$ ②: 負閉路 C に沿って φ を更新すると，φ^+ は b 流で，
$c(\varphi^+) = c(\varphi) + \varepsilon\ell_\varphi(C) < c(\varphi)$ となり矛盾．

② $\Longleftrightarrow$ ③: 最短路問題（第 3 回）でやった

③ $\Longrightarrow$ ①: LP の相補性条件から従う（次スライド）

最小費用流: 線形計画問題として

最小費用流の方が LP として美しい形になる．

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^\top \varphi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) = b(i) && (i \in V) \\
& 0 \leq \varphi(a) \leq u(a) && (a \in A)
\end{aligned}
$$

双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^V, y \in \mathbb{R}^A_+} \quad & \sum_{i \in V} b(i)x(i) - \sum_{a \in A} u(a)y(a) \\
\text{s.t.} \quad & x(i) - x(j) - y(a) \leq c(a) && (a = ij \in A) \\
& y(a) \geq 0 && (a \in A)
\end{aligned}
$$

最小費用流: 線形計画問題として

最小費用流の方が LP として美しい形になる．

主問題 (P)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^\top \varphi \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \mathrm{Out}(i)} \varphi(a) - \sum_{a \in \mathrm{In}(i)} \varphi(a) = b(i) \quad && (i \in V) \\
& 0 \leq \varphi(a) \leq u(a) && (a \in A)
\end{aligned}
$$

（後の都合のため）x の符号を反転すると...

双対問題 (D)

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^V, y \in \mathbb{R}^A_+} \quad & -\sum_{i \in V} b(i)x(i) - \sum_{a \in A} u(a)y(a) \\
\text{s.t.} \quad & -x(i) + x(j) - y(a) \leq c(a) \quad && (a = ij \in A) \\
& y(a) \geq 0 && (a \in A)
\end{aligned}
$$

相補性条件

G_φ のポテンシャル $x : V \to \mathbb{R}$ に対し，$y : A \to \mathbb{R}$ を次のように定める．

$$y(a) := \begin{cases} -c(a) + x(j) - x(i) & (\varphi(a) > 0) \cdots a^{-1} \text{ に対するポテンシャル条件のスラック} \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

Claim (x, y) は双対実行可能解．

相補性条件

G_φ のポテンシャル $x : V \to \mathbb{R}$ に対し，$y : A \to \mathbb{R}$ を次のように定める．

$$y(a) := \begin{cases} -c(a) + x(j) - x(i) & (\varphi(a) > 0) \cdots a^{-1} \text{ に対するポテンシャル条件のスラック} \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Claim (x, y) は双対実行可能解．

(∵)

$y \geq 0$: $\varphi(a) > 0$ のとき，a^{-1} が G_φ に存在するので，x がポテンシャルより

$$x(i) - x(j) \leq \ell_\varphi(a^{-1}) = -c(a).$$

よって，$y(a) \geq 0$.

$x(j) - x(i) - y(a) \leq c(a)$: $\varphi(a) > 0$ のときは，y の定義から自明に制約を満たす．$\varphi(a) = 0$ のときは，a が G_φ に存在するので，ポテンシャル条件より

$$x(j) - x(i) \leq \ell_\varphi(a) = c(a)$$

$y(a) = 0$ より，制約を満たす． □

相補性条件

$$y(a) := \begin{cases} -c(a) + x(j) - x(i) & (\varphi(a) > 0) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

Claim φ と (x, y) は相補性条件を満たす:

$$\varphi(a)(c(a) + x(i) - x(j) + y(a)) = 0 \quad (a = ij \in A)$$

$$(u(a) - \varphi(a))y(a) = 0 \quad (a \in A)$$

すなわち，φ は最小費用流．

相補性条件

$$y(a) := \begin{cases} -c(a) + x(j) - x(i) & (\varphi(a) > 0) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

Claim φ と (x, y) は相補性条件を満たす:

$$\varphi(a)(c(a) + x(i) - x(j) + y(a)) = 0 \quad (a = ij \in A)$$
$$(u(a) - \varphi(a))y(a) = 0 \quad (a \in A)$$

すなわち，φ は最小費用流．

(∵) 相補性条件の 1 つ目は y の定義より自明なので，2 つ目を示す．

背理法．$\varphi(a) < u(a)$ かつ $y(a) > 0$ と仮定する．このとき，y の定義から $\varphi(a) > 0$ である．よって，a と a^{-1} の両方が G_φ に存在するので，ポテンシャル条件より次が成立:

$$x(j) - x(i) \leq c(a)$$
$$x(i) - x(j) \leq -c(a).$$

$\therefore\ x(j) - x(i) = c(a)$. ところが，これを y の定義に代入すると，$y(a) = 0$ となってしまい矛盾． □

目次

アルゴリズム

以下のアルゴリズムを紹介する:

- 逐次最短路法
- 主双対法
- 容量スケーリング

cf. 最小重み二部マッチングに対する逐次最短路法・主双対法（第 3 回）

仮定

- b, u は整数値
- c は非負

  例えば，Hitchcock 型輸送問題に帰着した後，費用 $c' := c + M\mathbf{1}$ (M: 十分大) を考えればよい．

逐次最短路法

記号 流 φ に対し，

$$U^+ = \{i \in V : b(i) > (\partial\varphi)(i)\} \quad \ldots\ldots \text{供給が余っている頂点}$$
$$U^- = \{i \in V : b(i) < (\partial\varphi)(i)\} \quad \ldots\ldots \text{需要が満たされていない頂点}$$

逐次最短路法

$\varphi \leftarrow 0$ // 初期流
while $\partial\varphi \neq b$:
  if 残余ネットワーク G_φ 上で U^+ から U^- へ到達可能 :
    枝長 ℓ_φ に関する G_φ 上の U^+–U^- 最短路 P を求める
    // Bellman–Ford 法で $O(mn)$ 時間
    $\varepsilon := \min\{\min_{a\in P} c_\varphi(a), b(s) - \partial\varphi(s), \partial\varphi(t) - b(t)\}$ (s, t: P の始点・終点)
    P に沿って φ を ε だけ更新する．
  else
    return "b 流は存在しない"
return φ

逐次最短路法の証明

補題

逐次最短路法で求まる流を $0 = \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，φ_k は最小費用 b' 流である（ここで，$b' = \partial\varphi_k$）．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ のときは，c が非負かつ $\varphi_0 = 0$ より，自明に最小費用 0 流．

φ を最小費用 b' 流とし，G_φ で U^+ から U^- へ到達可能とする．

Claim. $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ は U^+–U^- 最短路をもつ

逐次最短路法の証明

補題

逐次最短路法で求まる流を $0 = \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，φ_k は最小費用 b' 流である（ここで，$b' = \partial\varphi_k$）．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ のときは，c が非負かつ $\varphi_0 = 0$ より，自明に最小費用 0 流．

φ を最小費用 b' 流とし，G_φ で U^+ から U^- へ到達可能とする．

Claim. $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ は U^+–U^- 最短路をもつ

(∵) 負閉路最適性条件より，$(G_\varphi, \ell_\varphi)$ には負閉路が存在しない． □

逐次最短路法の証明

補題

逐次最短路法で求まる流を $0 = \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，φ_k は最小費用 b' 流である（ここで，$b' = \partial\varphi_k$）．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ のときは，c が非負かつ $\varphi_0 = 0$ より，自明に最小費用 0 流．

φ を最小費用 b' 流とし，G_φ で U^+ から U^- へ到達可能とする．

Claim. $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ は U^+–U^- 最短路をもつ

P を U^+–U^- 最短路とし，φ^+ を更新後の b'' 流とする．

Claim. φ^+ は最小費用 b'' 流．

逐次最短路法の証明

補題

逐次最短路法で求まる流を $0 = \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_\mu$ とする．このとき，各 $k = 0, 1, \ldots, \mu$ に対し，φ_k は最小費用 b' 流である（ここで，$b' = \partial\varphi_k$）．

(証明) k に関する帰納法．$k = 0$ のときは，c が非負かつ $\varphi_0 = 0$ より，自明に最小費用 0 流．

φ を最小費用 b' 流とし，G_φ で U^+ から U^- へ到達可能とする．

Claim. $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ は U^+–U^- 最短路をもつ

P を U^+–U^- 最短路とし，φ^+ を更新後の b'' 流とする．

Claim. φ^+ は最小費用 b'' 流．

(∵) G_{φ^+} に負閉路が存在したと仮定．更新前の G_φ には負閉路がなかったので，図のような状況．すると，迂回路 P' は P より長さが短いことになり矛盾． □

逐次最短路法の証明

補題

逐次最短路法の途中で，$U^+, U^- \neq \emptyset$ かつ G_φ で U^+ から U^- へ到達不能になったとする．このとき，(G, u) に b 流は存在しない．

(証明) $X \subseteq V$ を G_φ において U^+ から到達可能な頂点全体とする．定義から $U^+ \subseteq X \subseteq V \setminus U^-$. このとき，

$$\begin{aligned} b(X) &= b(U^+) + b(X \setminus U^+) \\ &> (\partial\varphi)(U^+) + (\partial\varphi)(X \setminus U^+) \\ &= (\partial\varphi)(X) \\ &= \varphi(\mathrm{Out}_G(X)) - \varphi(\mathrm{In}_G(X)) \\ &= u(\mathrm{Out}_G(X)) - 0 \end{aligned}$$

となり，Gale の定理より b 流は存在しない． □

逐次最短路法の計算量

計算量解析

- 整数性より，φ の更新は高々 B 回

$(B := \frac{1}{2}\sum_{i \in V} |b(i)|$ ... 総供給/総需要量$)$

- 各更新は 1 回の $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ 上の最短路問題

$\longrightarrow$ Bellman–Ford 法で $O(mn)$ 時間

$(n = |V|, m = |A|)$

定理 (伊理 (1960))

逐次最短路法は，$O(mnB)$ 時間で，最小費用 b 流を求めるか，b 流が存在しないことを判定する．

擬多項式時間

主双対法

流 φ と $(G_\varphi, \ell_\varphi)$ のポテンシャル p の両方を保持することで，逐次最短路法の計算量を改善できる．

定義 (簡約枝長 (復習))

枝長 $\ell : A \to \mathbb{R}$ のポテンシャル $p : V \to \mathbb{R}$ に関する**簡約枝長** $\ell_p : A \to \mathbb{R}$ を次のように定める:

$$\ell_p(a) := \ell(a) + p(i) - p(j) \quad (a = ij \in A)$$

観察

- 任意の s–t 路 P に対し，
$$\ell_p(P) = \ell(P) + p(s) - p(t).$$
特に，ℓ_p に関する s–t 最短路 $\Longleftrightarrow$ ℓ に関する s–t 最短路．
- $\ell_p \geq 0$ .... **Bellman-Ford 法ではなく Dijkstra 法が使える！**

主双対法

主双対法

$\varphi \leftarrow 0$ // 初期流
$p \leftarrow (G, c)$ のポテンシャル // 初期ポテンシャル．*Dijkstra* 法で $O(m + n \log n)$ 時間
while $U^+, U^- \neq \emptyset$:
  if 残余ネットワーク G_φ で U^+ から U^- へ到達可能 :
    簡約枝長 $\ell_{\varphi,p}$ に関する G_φ 上の U^+–U^- 最短路 P と最短路長関数 d を求める // *Dijkstra* 法で $O(m + n \log n)$ 時間
    $\varepsilon := \min\{\min_{a \in P} c_\varphi(a), b(s) - \partial\varphi(s), \partial\varphi(t) - b(t)\}$ (s, t: P の始点・終点)
    P に沿って φ を ε だけ更新し，ポテンシャルを $p \leftarrow p + d$ と更新する．
  else
    return "b 流は存在しない"
return φ

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に $(D_\varphi, \ell_\varphi)$ 上のポテンシャル．

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に $(D_\varphi, \ell_\varphi)$ 上のポテンシャル．

(証明) $p^+ := p + d$ とする．$(d : V \to \mathbb{R}$ ... $(G_\varphi, \ell_{\varphi,p})$ 上の（U^+ からの）最短路長関数$)$

d は $(G_\varphi, \ell_{\varphi,p})$ のポテンシャルなので，任意の枝 $a = ij \in A_\varphi$ に対し，

$$d(j) - d(i) \le \ell_{\varphi,p}(a) = \ell_\varphi(a) + p(i) - p(j)$$

が成り立つ．移項すると $p^+(j) - p^+(i) \le \ell_\varphi(a)$ となり，p^+ は $(D_\varphi, \ell_\varphi)$ のポテンシャルである．

主双対法の証明

次の補題を示せば，あとは逐次最短路法の定理から従う．

補題

主双対法における p は，常に $(D_\varphi, \ell_\varphi)$ 上のポテンシャル．

(証明) $p^+ := p + d$ とする．($d : V \to \mathbb{R}$ ... $(G_\varphi, \ell_{\varphi,p})$ 上の（U^+ からの）最短路長関数)

d は $(G_\varphi, \ell_{\varphi,p})$ のポテンシャルなので，任意の枝 $a = ij \in A_\varphi$ に対し，

$$d(j) - d(i) \leq \ell_{\varphi,p}(a) = \ell_\varphi(a) + p(i) - p(j)$$

が成り立つ．移項すると $p^+(j) - p^+(i) \leq \ell_\varphi(a)$ となり，p^+ は $(D_\varphi, \ell_\varphi)$ のポテンシャルである．

次に，P に沿って φ を更新した後も p^+ がポテンシャルであることを示す．最短路 P 上の枝 $a = ij$ では，上の不等式で等号が成立:

$$d(j) - d(i) = \ell_{\varphi,p}(a) \quad \Longleftrightarrow \quad p^+(j) - p^+(i) = \ell_\varphi(a)$$

よって，更新後に生じる P の反転枝に関しても，ポテンシャル条件が成立．

主双対法の計算量

計算量解析

- 整数性より，φ の更新は高々 B 回

$(B := \frac{1}{2}\sum_{i \in V}|b(i)|$ … 総供給/総需要量)

- 各更新は 1 回の $(G_\varphi, \ell_{\varphi,p})$ 上の最短路問題

$\longrightarrow$ Dijkstra 法で $O(m + n\log n)$ 時間

$(n = |V|, m = |A|)$

定理 (Edmonds–Karp (1970), 冨澤 (1971))

主双対法は，$O((m + n\log n)B)$ 時間で，最小費用 b 流を求めるか，b 流が存在しないことを判定する．

擬多項式時間

容量スケーリング法

逐次最短路法・主双対法の反復回数を $O(B) \to O(n \log b_{\max})$ に改善したもの．

$B = \frac{1}{2}\sum_{i \in V} |b(i)|$, $b_{\max} = \max_{i \in V} |b(i)|$

弱多項式時間

追加の仮定

$u \equiv +\infty$ （例えば，Hitchcock 型輸送問題に帰着すればよい）

記号

- $\Delta \in \mathbb{Z}_{++}$: スケーリングパラメータ
- 流 φ に対し，

$$U^+_\Delta := \{i \in U^+ : b(i) \geq (\partial\varphi)(i) + \Delta\} \subseteq U^+$$
$$U^-_\Delta := \{i \in U^- : b(i) \leq (\partial\varphi)(i) - \Delta\} \subseteq U^-$$

.... Δ 以上供給が余っている/需要が満たされていない頂点

整数性より $\Delta = 1$ のときは，$(U^+_\Delta, U^-_\Delta) = (U^+, U^-)$.

容量スケーリング法

$\varphi \leftarrow 0$ // 初期流

$p \leftarrow (G, c)$ のポテンシャル // 初期ポテンシャル．Dijkstra 法で $O(m + n\log n)$ 時間

$\Delta \leftarrow 2^{\lceil \log_2 b_{\max} \rceil}$ // 初期スケーリングパラメータ

while $\Delta \geq 1$:

  if 残余ネットワーク G_φ で U_Δ^+ から U_Δ^- へ到達可能 :

    簡約枝長 $\ell_{\varphi,p}$ に関する G_φ 上の U_Δ^+–U_Δ^- 最短路 P と最短路長関数 d を求める // Dijkstra 法で $O(m + n\log n)$ 時間

    P に沿って φ を Δ だけ更新し，ポテンシャルを $p \leftarrow p + d$ と更新する．

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$ // スケーリングパラメータの更新

if $\partial\varphi = b$:

  return φ

else

  return "b 流は存在しない"

容量スケーリング法の解析

Δ が一定の間を **Δ フェーズ**と呼ぶ．

- Δ フェーズにおける $\varphi(a)$ は Δ の倍数．

  ($\because$) 初期流は $\varphi \equiv 0$ より自明．Δ フェーズにおける更新では，毎回 Δ だけ増減するので OK．最後に，$\Delta \to \Delta/2$ フェーズに移行したときも，φ が Δ の倍数なので，自明に $\Delta/2$ の倍数でもあるので OK．

- φ は容量制約 $0 \leq \varphi \leq u$ を満たす．

  ($\because$) $u \equiv +\infty$ より上限は自明．$\varphi(a) > 0$ のとき，$\varphi(a)$ は Δ の倍数なので，更新で Δ だけ減らしても負にはならない．

容量スケーリング法の解析

補題

各 Δ フェーズにおける更新は高々 n 回．

(証明) φ を Δ フェーズの開始時の流とする．X を G_φ において $U^+_{2\Delta}$ から到達可能な頂点全体とすると，$U^+_{2\Delta} \subseteq X \subseteq V \setminus U^-_{2\Delta}$. また，$u \equiv +\infty$ より，G に X から出る枝は存在しない．

容量スケーリング法の解析

補題

各 Δ フェーズにおける更新は高々 n 回.

(証明) φ を Δ フェーズの開始時の流とする．X を G_φ において $U^+_{2\Delta}$ から到達可能な頂点全体とすると，$U^+_{2\Delta} \subseteq X \subseteq V \setminus U^-_{2\Delta}$. また，$u \equiv +\infty$ より，G に X から出る枝は存在しない.

$(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$: Δ フェーズ中の更新で使われた P の始点・終点（重複を許す）

Claim $|\{\ell : s_\ell \in X, t_\ell \notin X\}| \leq |\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}|$

容量スケーリング法の解析

補題

各 Δ フェーズにおける更新は高々 n 回．

(証明) φ を Δ フェーズの開始時の流とする．X を G_φ において $U^+_{2\Delta}$ から到達可能な頂点全体とすると，$U^+_{2\Delta} \subseteq X \subseteq V \setminus U^-_{2\Delta}$. また，$u \equiv +\infty$ より，G に X から出る枝は存在しない．

$(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$: Δ フェーズ中の更新で使われた P の始点・終点（重複を許す）

Claim $|\{\ell : s_\ell \in X, t_\ell \notin X\}| \leq |\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}|$

(∵) G に X の外に出る枝はないので，X から出るパスを使うには，それより前に X へ入るパスを使い，G_φ に X から出る枝を逆向き枝として作る必要がある． $\square$

容量スケーリング法の解析

Claim $|\{\ell : s_\ell \in X, t_\ell \notin X\}| \le |\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}|$

よって，

$$\begin{aligned} k &\le |\{\ell : s_\ell, t_\ell \in X\}| + 2|\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}| + |\{\ell : s_\ell, t_\ell \notin X\}| \\ &= |\{\ell : t_\ell \in X\}| + |\{\ell : s_\ell \notin X\}| \\ &\le |X \cap U_\Delta^-| + |U_\Delta^+ \setminus X| \\ &\le n. \quad \square \end{aligned}$$

容量スケーリング法の解析

Claim $|\{\ell : s_\ell \in X, t_\ell \notin X\}| \leq |\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}|$

よって，

$$\begin{aligned} k &\leq |\{\ell : s_\ell, t_\ell \in X\}| + 2|\{\ell : s_\ell \notin X, t_\ell \in X\}| + |\{\ell : s_\ell, t_\ell \notin X\}| \\ &= |\{\ell : t_\ell \in X\}| + |\{\ell : s_\ell \notin X\}| \\ &\leq |X \cap U_\Delta^-| + |U_\Delta^+ \setminus X| \\ &\leq n. \quad \square \end{aligned}$$

定理 (Edmonds–Karp (1970))

容量スケーリング法は，$O(n(m + n\log n)\log b_{\max})$ 時間で，最小費用 b 流を求めるか，b 流が存在しないことを判定する．

$(n = |V|, m = |A|, b_{\max} = \max_{i \in V}|b(i)|)$

弱多項式時間

最小費用流: まとめ

まとめ

- 最小費用流問題の定義，Gale の定理，負閉路最適性条件
- 逐次最短路法，主双対法，容量スケーリング法

その他のアルゴリズム

- 最小平均閉路消去法 $O(m^3n^2\log n)$ 時間 **強多項式時間**
  (Goldberg–Tarjan (*JACM* 1989))
- 費用スケーリング $O(mn\log(n^2/m)\log(nC))$ 時間　　$C = \max_{a\in A}|c(a)|$
  (Goldberg–Tarjan (*Math of OR* 1990))
- 現在最速 $m^{1+o(1)}$ 時間 (*JACM* 2025[1])

---

[1]L. Chen, R. Kyng, Y. P. Liu, R. Peng, M. P. Gutenberg, and S. Sachdeva, *“Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time”*, *JACM*, 2025.