組合せ最適化特論

第１回（多面体的組合せ論）

担当: **相馬 輔**

2025/10/23

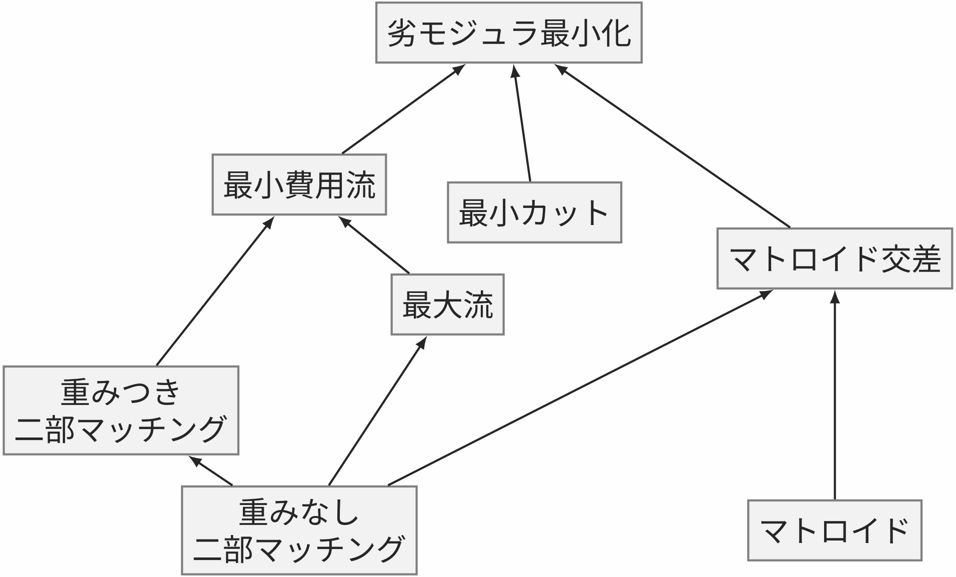
本講義の概要

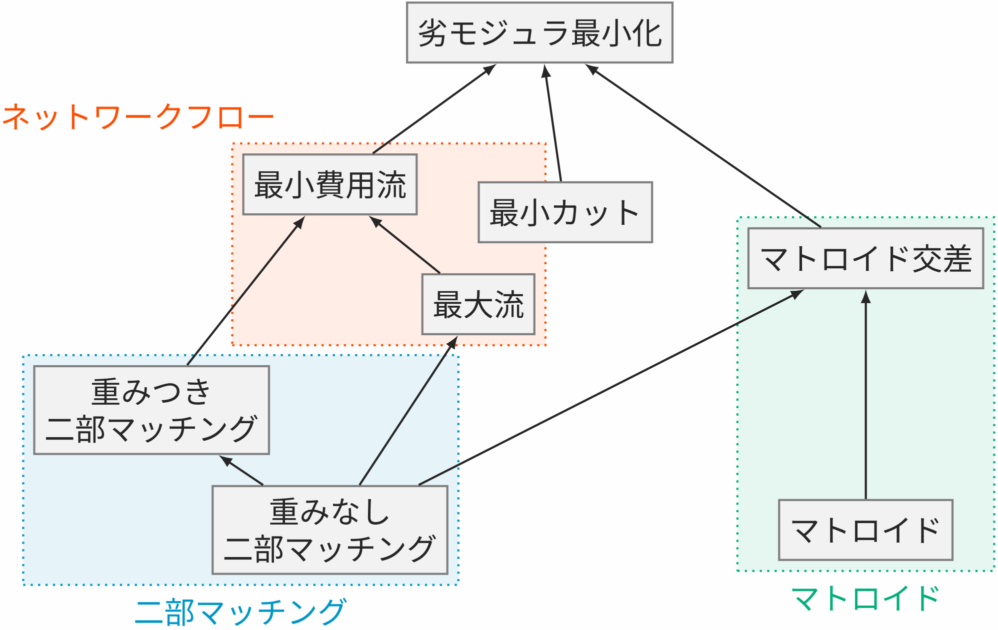
組合せ最適化の**定跡**と**アルゴリズム**を学ぶ．

- 二部マッチング，ネットワークフロー，マトロイドなどの定番問題
- 最大最小定理
- 線形計画法・多面体を用いたアルゴリズム設計
- 劣モジュラ最適化としての統一的視点

事務連絡

- Zoom の continuous chat で質問を受け付けます
- スライドと録画は毎回 google drive にアップロードします


劣モジュラ最小化
最小費用流
最小カット
マトロイド交差
最大流
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド


劣モジュラ最小化
ネットワークフロー
最小費用流
最小カット
最大流
マトロイド交差
重みつき
二部マッチング
重みなし
二部マッチング
マトロイド
二部マッチング
マトロイド

各回の内容（予定） I

1. (10/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）
2. (10/30) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
3. (11/6) 二部マッチング②（最短路問題の復習，閉路最適性基準と逐次最短路法，ポテンシャル最適性基準と主双対法，ハンガリー法再訪）
4. (11/13) 最大流① （定式化，最大流最小カット定理，Menger の定理，Hakimi の定理，密グラフ抽出）

(11/20) 休み

(11/27) 休み

各回の内容（予定） II

5. (12/4) 最大流②（残余ネットワーク，Ford-Fulkerson 法，容量スケーリング法）
6. (12/11) 最小カット（永持茨木のアルゴリズム，Karger のアルゴリズム）
7. (12/18) 最小費用流①（定式化，輸送問題，最大流との関係，応用？）
8. (12/25) 最小費用流②（閉路最適性基準，逐次最短路法，容量スケーリング法）

   (1/1) 休み

9. (1/8) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）

   (1/15) 休み

10. (1/22) マトロイド交差①（定義，Edmonds の最大最小定理，応用例）
11. (1/29) マトロイド交差②（交換可能性グラフ，増加道アルゴリズム）

各回の内容（予定） III

12. (2/5) 劣モジュラ関数①（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）
13. (2/12) 劣モジュラ関数②（劣モジュラ最大化，近似アルゴリズム，貪欲法）

(2/19) 予備

参考図書

本講義のレベル

- 垣村『組合せ最適化への招待 モデルとアルゴリズム』 SGC ライブラリ, 2024.
  .... 色々なトピックがコンパクトにまとまっていて手軽

大学院生〜研究者向け

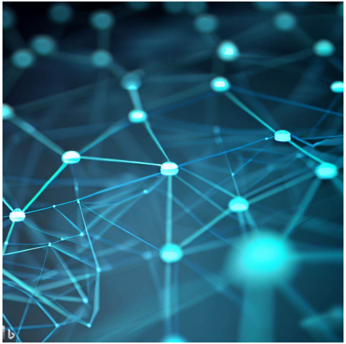
- Korte and Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 6th ed, Springer, 2018. .... Springer Link から DL 可能
- 『組合せ最適化 原書 6 版: 理論とアルゴリズム』, 丸善出版, 2022.
  .... 上の和訳
- Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2003.
  .... 凄い文量だがトピックごとに読める．大百科として

目次

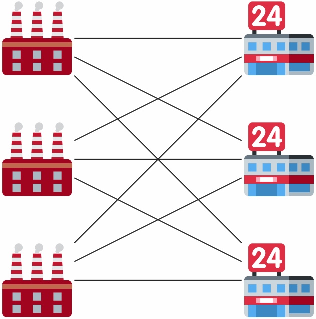
目次

組合せ最適化とは

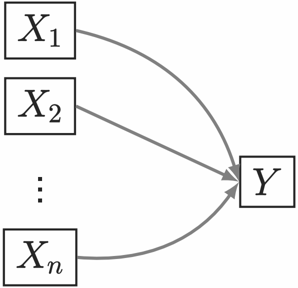
離散的な対象の中から最も良いものを**効率的**に求める方法論



ネットワーク



マッチング



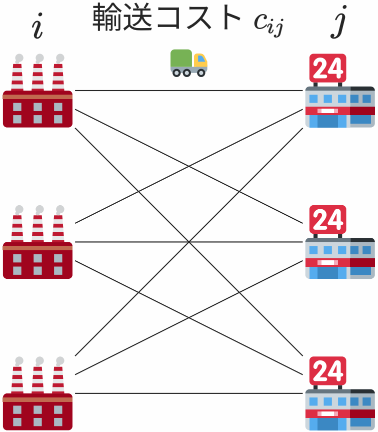
機械学習・統計

例: 割当問題

割当問題

入力 コスト $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \le i, j \le n)$
出力 総コスト最小のマッチング

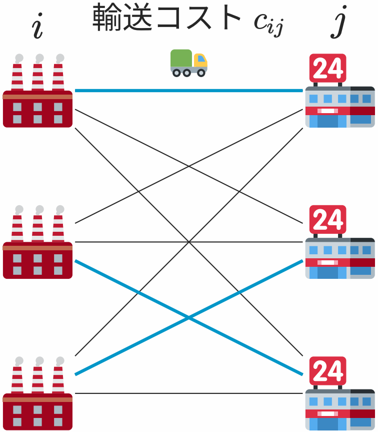
マッチング... どの頂点にも 1 本だけ枝が接続しているような枝部分集合



例: 割当問題

割当問題

入力 コスト $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq n)$
出力 総コスト最小のマッチング



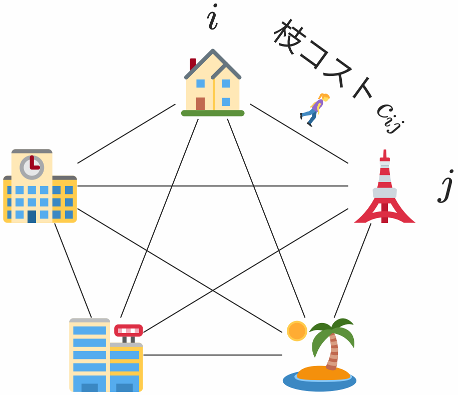
総コスト $= c_{11} + c_{23} + c_{32}$.

マッチング... どの頂点にも 1 本だけ枝が接続しているような枝部分集合

例: 巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題

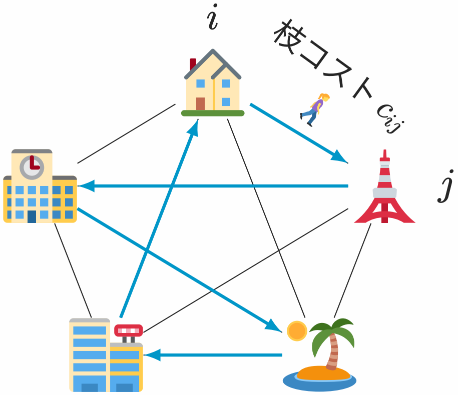
入力 枝コスト $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq n)$
出力 各頂点を一度だけ通る閉路で総コスト最小のもの



例: 巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題

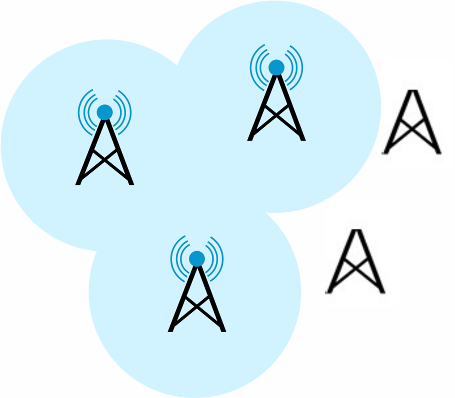
入力 枝コスト $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq n)$
出力 各頂点を一度だけ通る閉路で総コスト最小のもの



例: 最大被覆問題

最大被覆問題

入力 V: 基地局候補地の集合, $k \in \mathbb{Z}_+$
出力 $S \subseteq V$ で $|S| \le k$ かつ S に設置したときの被覆範囲が最大となるもの



愚直な方法: 全探索

解をすべて調べて，その中から最適解を選ぶ！

愚直な方法: 全探索

解をすべて調べて，その中から最適解を選ぶ！

巡回セールスマン問題の場合

1 秒間に 10 京 (= 10^{17}) 通り調べられるとする．

頂点数 n	計算時間 $\approx n!$
10	3.6×10^{-11} 秒
20	24 秒
30	3168 万年

愚直な方法: 全探索

解をすべて調べて，その中から最適解を選ぶ！

巡回セールスマン問題の場合

1 秒間に 10 京 ($= 10^{17}$) 通り調べられるとする．

頂点数 n	計算時間 $\approx n!$
10	3.6×10^{-11} 秒
20	24 秒
30	3168 万年

引用: 『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！
https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs

愚直な方法: 全探索

解をすべて調べて，その中から最適解を選ぶ！

巡回セールスマン問題の場合

1 秒間に 10 京 $(= 10^{17})$ 通り調べられるとする．

頂点数 n	計算時間 $\approx n!$
10	3.6×10^{-11} 秒
20	24 秒
30	3168 万年

引用: 『フカシギの数え方』 おねえさんといっしょ！ みんなで数えてみよう！
https://www.youtube.com/watch?v=Q4gTV4r0zRs

現実的ではないので，より**効率的なアルゴリズム**を研究する必要！

“効率的” って何だろう？ 🤔

アルゴリズムの時間計算量

アルゴリズムの時間計算量

入力の大きさ n に対して，アルゴリズムが**最大で**何回の**基本演算**（四則演算，大小比較，ビット演算...）を行うかで測る．

アルゴリズムの時間計算量

アルゴリズムの時間計算量

入力の大きさ n に対して，アルゴリズムが**最大で**何回の**基本演算**（四則演算，大小比較，ビット演算...）を行うかで測る．

多項式時間 高々 n の多項式回の基本演算

例: $O(n)$ 時間，$O(n^2)$ 時間，$O(n \log n)$ 時間，$O(n^{10000})$ 時間

指数時間 $O(2^n)$ 回，もしくはそれより大きい回数の基本演算

アルゴリズムの時間計算量

アルゴリズムの時間計算量

入力の大きさ n に対して，アルゴリズムが**最大で**何回の**基本演算**（四則演算，大小比較，ビット演算...）を行うかで測る．

多項式時間 高々 n の多項式回の基本演算

例: $O(n)$ 時間，$O(n^2)$ 時間，$O(n \log n)$ 時間，$O(n^{10000})$ 時間

指数時間 $O(2^n)$ 回，もしくはそれより大きい回数の基本演算

「最大で」・・・アルゴリズムにとって**最も苦手**な入力を与えたときにかかる計算量を考える．（最悪時計算量）

目次

線形計画 (LP)

LP は以下の標準形で書くことができる:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad && (i = 1, \ldots, m) \\
& x_j \ge 0 && (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

線形計画 (LP)

LP は以下の標準形で書くことができる:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\
& x_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c^\top x \\
\text{subject to} \quad & Ax \le b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

- A: $m \times n$ 行列
- b: m 次元ベクトル
- c: n 次元ベクトル
- x: n 次元決定変数

双対問題・強双対定理

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題・強双対定理

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

定理 (強双対定理)

主問題 (P) と双対問題 (D) がともに実行可能ならば，主問題 (P) に最適解 x^*，双対問題 (D) に最適解 y^* が存在して $c^\top x^* = b^\top y^*$ が成り立つ．

相補性条件

定理 (相補性条件)

主問題 (P) の実行可能解 x と双対問題 (D) の実行可能解 y に対し，x と y がそれぞれの最適解
$\iff\ (A^\top y - c)^\top x = 0$ かつ $(b - Ax)^\top y = 0$

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

相補性条件

定理 (相補性条件)

主問題 (P) の実行可能解 x と双対問題 (D) の実行可能解 y に対し，x と y がそれぞれの最適解
$\iff\ (A^\top y - c)^\top x = 0$ かつ $(b - Ax)^\top y = 0$

証明

実行可能解 (x, y) に対して，

$$c^\top x \le (A^\top y)^\top x = y^\top (Ax) \le y^\top b$$

が常に成り立つ（弱双対性）．

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

相補性条件

定理 (相補性条件)

主問題 (P) の実行可能解 x と双対問題 (D) の実行可能解 y に対し，x と y がそれぞれの最適解
$\iff$ $(A^\top y - c)^\top x = 0$ かつ $(b - Ax)^\top y = 0$

証明

実行可能解 (x, y) に対して，

$$c^\top x \le (A^\top y)^\top x = y^\top (Ax) \le y^\top b$$

が常に成り立つ（弱双対性）． (x, y) が最適解ならば，強双対定理から $c^\top x = y^\top b$ なので，途中の不等号はすべて等号．よって

$$c^\top x = (A^\top y)^\top x, \quad y^\top (Ax) = y^\top b$$

が成り立つ．移項すると相補性条件が出る．逆も同様． □

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

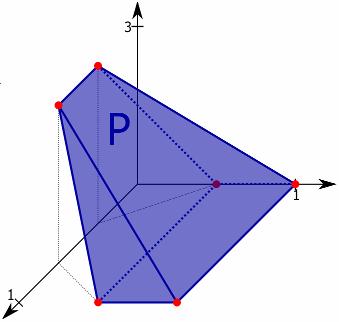
双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

多面体と端点

LP の実行可能領域

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}}\}$$



は**多面体 (polyhedron)** と呼ばれる凸集合．

補題

多面体 P の端点を x とする．このとき，次を満たす大きさ n の行部分集合 S が存在する．

- $\tilde{A}$ から S に対応する行を抜き出した部分行列 $\tilde{A}_S$ は正則
- x は線形方程式 $(\tilde{A}_S)x = \tilde{b}_S$ の（一意）解．ここで，$\tilde{b}_S$ は b から S に対応する行を抜き出したベクトル．

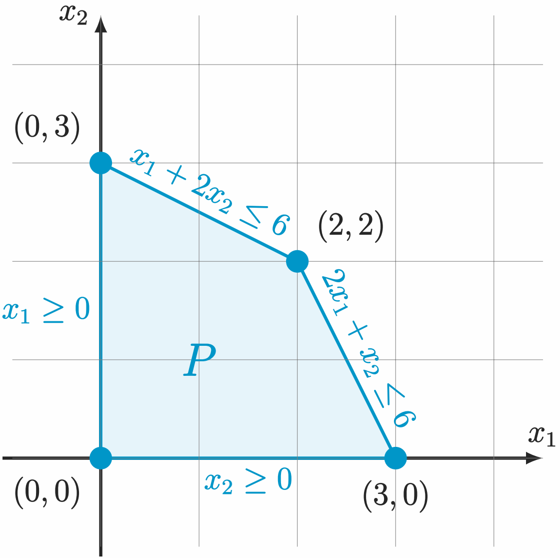
例

P:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ の多面体

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



目次

1. 組合せ最適化とは

- 組合せ最適化とは？
- 組合せ最適化問題を「解く」とは？
- 多項式時間とは？

2. 線形計画の復習

- 主問題・双対問題
- 相補性条件
- 多面体

3. 整数多面体，完全単模行列

- 完全単模行列
- 整数多面体
- 整数多面体と LP の整数性

LPを使った組合せ最適化問題の解法？

1. 組合せ最適化問題を **0–1 整数計画問題 (IP)** として定式化する
2. IP の 0–1 制約を落として得られる LP を解く
3. もし 0–1 成分の LP 最適解が得られたら，それは元の IP の最適解でもあるので，問題が解けた（ラッキー！）

これがうまくいくための十分条件は？　→ **完全単模行列**

例：二部マッチング

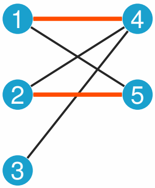
重み付き二部マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 G の最大重みマッチング M

例：二部マッチング

重み付き二部マッチング問題

入力 $G=(V;E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 G の最大重みマッチング M



IP 定式化

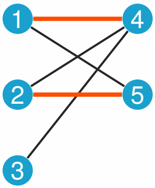
$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 \quad (i \in V) \\
& x_e \in \{0,1\} \quad (e \in E)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w^\top x \\
\text{s.t.} \quad & x_{14} + x_{15} && \le 1 \\
& x_{24} + x_{25} && \le 1 \\
& x_{34} && \le 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} && \le 1 \\
& x_{15} + x_{25} && \le 1 \\
& x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} && \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

例：二部マッチング

重み付き二部マッチング問題

入力 $G = (V; E)$: 二部グラフ，枝重み w_e $(e \in E)$
出力 G の最大重みマッチング M



LP 定式化

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e \le 1 \quad (i \in V) \\ & \color{orangered}{x_e \ge 0} \qquad\quad (e \in E) \end{aligned}$$

実は，係数行列の完全単模性により**常に** 0–1 の LP 最適解をもつ！

$$\begin{aligned} \max \quad & w^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x_{14} + x_{15} && \le 1 \\ & x_{24} + x_{25} && \le 1 \\ & x_{34} && \le 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} && \le 1 \\ & x_{15} + x_{25} && \le 1 \\ & x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34} && \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

完全単模行列

定義 (完全単模行列)

$m \times n$ 行列 A が**完全単模行列** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A のすべての小行列式 $\in \{0, \pm 1\}$

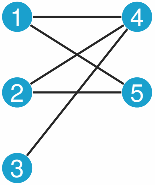
例

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例: 二部マッチング

補題

二部マッチングの LP の係数行列 A は完全単模行列．



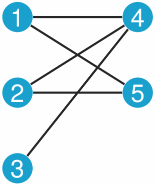
$$
\begin{array}{c}
\\
1\\2\\3\\4\\5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_{14} & x_{15} & x_{24} & x_{25} & x_{34} \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

例: 二部マッチング

補題

二部マッチングの LP の係数行列 A は完全単模行列．

証明 $k \times k$ 小行列式 $= 0, \pm 1$ であることを，k に関する帰納法で示す．
$k = 1$ のときは，A の成分は $0, 1$ なので明らか．
$k > 1$ とし，$k \times k$ 小行列 A' を考える．



$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_{14} & x_{15} & x_{24} & x_{25} & x_{34} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

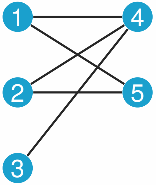
例: 二部マッチング

補題

二部マッチングの LP の係数行列 A は完全単模行列．

証明 $k \times k$ 小行列式 $= 0, \pm 1$ であることを，k に関する帰納法で示す．
$k = 1$ のときは，A の成分は $0, 1$ なので明らか．
$k > 1$ とし，$k \times k$ 小行列 A' を考える．

- A' にゼロ列が含まれる場合: $\det A' = 0$ より成立．



$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_{14} & x_{15} & x_{24} & x_{25} & x_{34} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

例: 二部マッチング

補題

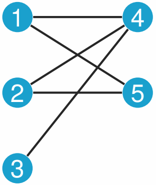
二部マッチングの LP の係数行列 A は完全単模行列．

証明 $k \times k$ 小行列式 $= 0, \pm 1$ であることを，k に関する帰納法で示す．

$k = 1$ のときは，A の成分は $0, 1$ なので明らか．

$k > 1$ とし，$k \times k$ 小行列 A' を考える．

- A' にゼロ列が含まれる場合: $\det A' = 0$ より成立．
- A' に 1 が 1 つだけ含まれる列がある場合: 余因子展開すれば，$(k-1) \times (k-1)$ 小行列 A'' を用いて，$\det A' = \pm \det A''$．帰納法の仮定より $\det A'' \in \{0, \pm 1\}$ なので OK．



$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_{14} & x_{15} & x_{24} & x_{25} & x_{34} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

例: 二部マッチング

補題

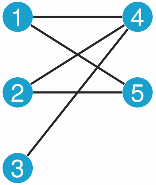
二部マッチングの LP の係数行列 A は完全単模行列．

証明 $k \times k$ 小行列式 $= 0, \pm 1$ であることを，k に関する帰納法で示す．

$k = 1$ のときは，A の成分は $0, 1$ なので明らか．

$k > 1$ とし，$k \times k$ 小行列 A' を考える．

- A' にゼロ列が含まれる場合: $\det A' = 0$ より成立．
- A' に 1 が 1 つだけ含まれる列がある場合: 余因子展開すれば，$(k-1) \times (k-1)$ 小行列 A'' を用いて，$\det A' = \pm \det A''$．帰納法の仮定より $\det A'' \in \{0, \pm 1\}$ なので OK．
- A' のどの列にも 1 が 2 つ含まれる場合: 左側の頂点に $+1$，右側の頂点に -1 をおいた行ベクトル v を考えると，$vA' = 0$．よって，A' は正則ではないので，$\det A' = 0$． □

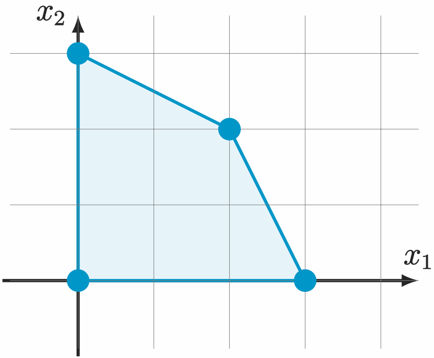


$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_{14} & x_{15} & x_{24} & x_{25} & x_{34} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

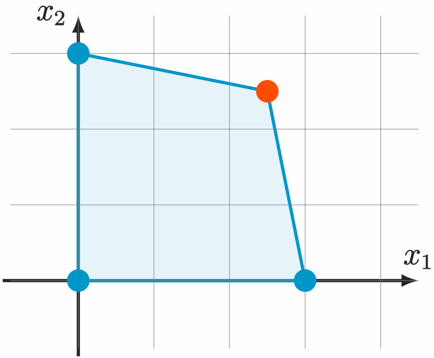
整数多面体

定義 (整数多面体)

全ての端点が整数ベクトルである多面体を**整数多面体**と呼ぶ．



整数多面体



整数多面体でない多面体

完全単模行列と整数多面体

定理

完全単模行列 A と整数ベクトル b が定める多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ は整数多面体．

完全単模行列と整数多面体

定理

完全単模行列 A と整数ベクトル b が定める多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ は整数多面体．

証明

x を P の端点とする．x は，$(\tilde{A}, \tilde{b})$ から n 行を抜き出して得られる正則行列 A' と部分ベクトル b' に対して，線形方程式 $A'x = b'$ の解 $x = (A')^{-1}b'$ として得られる．

完全単模行列と整数多面体

定理

完全単模行列 A と整数ベクトル b が定める多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ は整数多面体．

証明

x を P の端点とする．x は，$(\tilde{A}, \tilde{b})$ から n 行を抜き出して得られる正則行列 A' と部分ベクトル b' に対して，線形方程式 $A'x = b'$ の解 $x = (A')^{-1}b'$ として得られる．
クラーメルの公式より，

$$(A')^{-1}_{ij} = \frac{\Delta_{j,i} A'}{\det A'} \in \{0, \pm 1\}$$

※ $\Delta_{j,i} A' = A'$ の (j, i) 余因子
b' は整数ベクトルなので，$(A')^{-1}b'$ も整数ベクトル． □

完全単模行列とLPの整数性

定理

A が完全単模行列，b が整数ベクトルである主問題 (P) を考える．もし (P) が最適解をもつならば，(P) に**整数ベクトル**の最適解が存在する．

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

完全単模行列と LP の整数性

定理

A が完全単模行列，b が整数ベクトルである主問題 (P) を考える．もし (P) が最適解をもつならば，(P) に**整数ベクトル**の最適解が存在する．

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

証明

前定理より，(P) の実行可能領域 P は整数多面体である．いま，(P) が最適解をもつので，特に P の端点である最適解が存在する．整数多面体の定義より，これは整数ベクトル． $\square$