組合せ最適化特論

第 10 回（劣モジュラ最大化）

担当: **相馬 輔**

2026/2/26

目次

1. 劣モジュラ最大化
   - 定式化
   - モデリング例
2. 貪欲法
   - 古典貪欲法
   - 連続貪欲法

目次

1. **劣モジュラ最大化**
   - 定式化
   - モデリング例
2. **貪欲法**
   - 古典貪欲法
   - 連続貪欲法

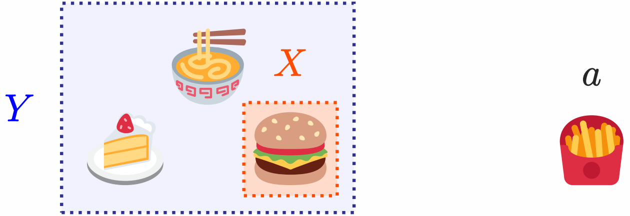
劣モジュラ関数

$f : 2^V \to \mathbb{R}$ が**劣モジュラ関数**

$$\iff \forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y,$$

$$\underbrace{f(X \cup a) - f(X)}_{\text{小さい集合の増分}} \geq \underbrace{f(Y \cup a) - f(Y)}_{\text{大きい集合の増分}}$$

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \qquad (\forall X, Y \subseteq V)$$



単調劣モジュラ関数最大化

[Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

$f : 2^V \to \mathbb{R}_+$ ... 非負**単調**劣モジュラ, $f(\emptyset) = 0$

[単調 $\iff$ $f(X) \le f(Y) \quad (X \subseteq Y)$]

$$\max \quad f(X) \qquad \text{s.t.} \quad X \in \mathcal{C}$$

単調劣モジュラ関数最大化

[Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

$f : 2^V \to \mathbb{R}_+$ ... 非負**単調**劣モジュラ, $f(\emptyset) = 0$

[単調 $\iff f(X) \le f(Y) \quad (X \subseteq Y)$]

$$\max \quad f(X) \qquad \text{s.t.} \quad X \in \mathcal{C}$$

$|X| \le k$, $\sum_{i \in X} w(i) \le 1$ など

単調劣モジュラ関数最大化

[Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

$f : 2^V \to \mathbb{R}_+$ ... 非負**単調**劣モジュラ, $f(\emptyset) = 0$

[単調 $\iff$ $f(X) \le f(Y) \quad (X \subseteq Y)$]

$$\max \quad f(X) \qquad \text{s.t.} \quad X \in \mathcal{C}$$

$|X| \le k$, $\sum_{i \in X} w(i) \le 1$ など

応用:

- 文書要約 [Lin and Bilmes 2011]
- モデル解釈 [Ribeiro, Singh, and Guestrin 2016]
- 変数選択 [Das and Kempe 2011; Elenberg et al. 2018]

単調劣モジュラ最大化

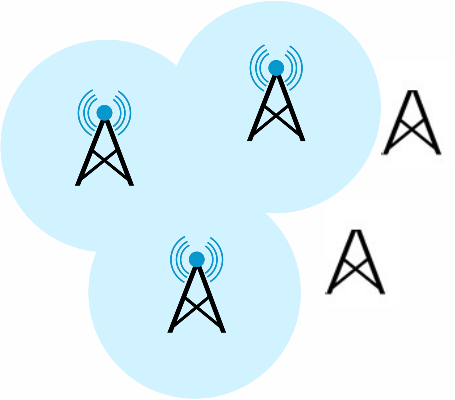
名前	制約	近似比
サイズ制約	$\|X\| \leq k$	$1 - 1/e$ [NWF '78]
ナップサック制約	$\sum_{i \in X} w_i \leq 1$	$1 - 1/e$ [Sviridenko 2004]
マトロイド制約	$X \in \mathcal{I}$	$1 - 1/e$ [Calinescu et al. 2011]

- $(1 - 1/e)$ 近似 $\iff$ $f(X) \geq (1 - 1/e) \max_{X^* \in \mathcal{C}} f(X^*)$ となる X を出力
- 近似比 $1 - 1/e$ はオラクルモデルの多項式時間アルゴリズムの中で最良 [Nemhauser and Wolsey 1978]

例: 最大被覆問題

最大被覆問題

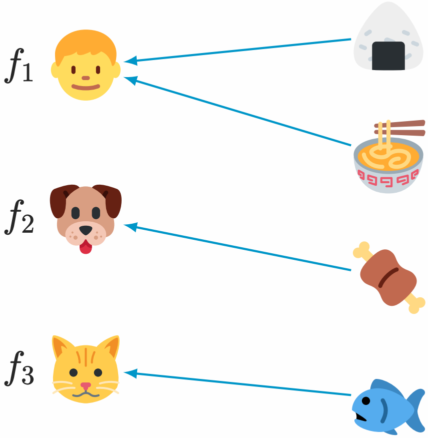
入力 V: 基地局候補地の集合, $k \in \mathbb{Z}_+$
出力 $S \subseteq V$ で $|S| \leq k$ かつ S に設置したときの被覆範囲が最大となるもの



例: 不可分財の分配

$U = \{v_1, \ldots, v_n\}$ … 財の集合
f_i … i さんの効用関数，単調劣モ
$(i = 1, \ldots, m)$

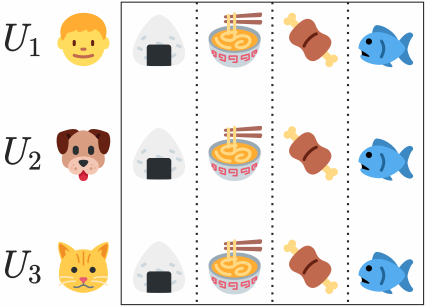
社会効用 $\sum_{i=1}^{m} f_i(X_i)$ が最大の分配 $(X_1, \ldots, X_m)$ を求めたい．



例: 不可分財の分配

- $V := U$ の m 個のコピー
- $f(X) := \sum_{i=1}^{m} f_i(X \cap U_i)$
- $\mathcal{C}$: V 上の分割マトロイド（各財は 1 人まで割当可能）

分割マトロイド制約の単調劣モ最大化



例: 文書要約 [Lin and Bilmes 2011]

V: 元文書の文全ての集合, $X \subseteq V \longleftrightarrow$ 要約
$r_1, \ldots, r_K$: 参照文
$c_e(X) =$ n-gram e が要約 X に現れる回数
$M_{e,i} =$ n-gram e が参照文 r_i に現れる回数

ROUGE-N

$$f(X) = \sum_{r \in R} \sum_{e:\ \text{文}\ r\ \text{に含まれる n-gram}} \min\{c_e(X), M_{e,i}\}$$

(※ 簡単のため正規化定数は省いた)

- ROUGE-N は単調劣モジュラ関数
- サイズ制約 $\longleftrightarrow$ 要約に使える文の数に制約
- ナップサック制約 $\longleftrightarrow$ 要約の文字数に制約

要約文

民間英語試験の延期を決定した.

参照文 A

英語教育が専門の○○氏は, 民間英語試験は問題が多く, ...

例: モデル解釈(SP-LIME) [Ribeiro, Singh, and Guestrin 2016]

近年の機械学習モデルは複雑で解釈しづらい．→**解釈性**

Local Iterpretable Model-agnostic Explanations (LIME)

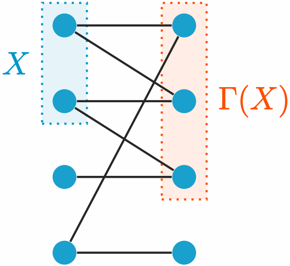
各訓練データに対して，“特徴量ごとの予測への貢献度”を計算してくれる手法

引用: LIME のチュートリアル

データセット全体での挙動を知りたい場合は？

例: モデル解釈 (SP-LIME) [Ribeiro, Singh, and Guestrin 2016]

V = 訓練データの集合
U = 特徴量の集合
a_{ij} = データ i に対する特徴量 j の LIME スコア
$G = (V, U; E)$ ... $a_{ij} > 0$ の (i, j) に枝を引いた二部グラフ
$w_j := \sqrt{\sum_{i \in V} a_{ij}}$ ... 特徴量 j の重み



$$f(X) = \sum_{j \in \Gamma_G(X)} w_j$$

- モデルの全体的挙動を理解する上で多様な訓練データを抽出できる
- サイズ制約 $\longleftrightarrow$ 抽出するデータ数に制約

例: 変数選択 [Das and Kempe 2011; Elenberg et al. 2018]

$V = \{1, \ldots, n\}$
$\boldsymbol{x}_i$: 説明変数 ($i = 1, \ldots, n$), $\boldsymbol{y}$: 被説明変数

$$f(X) = \|\boldsymbol{y}\|_2^2 - \min_{\beta : \mathrm{supp}(\beta) \subseteq X} \left\| \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i \right\|_2^2$$

... X に入っている変数だけ使ったときの最良残差

- 抑圧変数がない $\implies$ f: 単調劣モジュラ
- $X = [\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n]$ に対する RIP 仮定 $\implies$ f: 弱劣モジュラ（近似的に劣モジュラ）

目次

1. **劣モジュラ最大化**
   - 定式化
   - モデリング例
2. **貪欲法**
   - 古典貪欲法
   - 連続貪欲法

最大化アルゴリズム

サイズ制約 $|X| \leq k$（組合せ的アルゴリズム）

- 古典貪欲法 [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]
- 確率的貪欲法 [Mirzasoleiman et al. 2015]

一般の制約 $X \in \mathcal{C}$（連続最適化的アルゴリズム）

- 連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2010; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2014]

最大化アルゴリズム

サイズ制約 $|X| \leq k$（組合せ的アルゴリズム）

- **古典貪欲法** [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]
- **確率的貪欲法** [Mirzasoleiman et al. 2015]

一般の制約 $X \in \mathcal{C}$（連続最適化的アルゴリズム）

- 連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2010; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2014]

古典貪欲法 [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

$X_0 \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \ldots, k$:
    $a \in V \setminus X_{i-1}$ のうち $f(X_{i-1} \cup a)$ が最大のものを求め，a_i とする．
    $X_i \leftarrow X_{i-1} \cup a_i$
return $X = X_k$

古典貪欲法 [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

$X_0 \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \ldots, k$:
　　$a \in V \setminus X_{i-1}$ のうち $f(X_{i-1} \cup a)$ が最大のものを求め，a_i とする．
　　$X_i \leftarrow X_{i-1} \cup a_i$
return $X = X_k$

- 貪欲アルゴリズムの出力を X とすると，

$$f(X) \geq (1 - 1/e) \underbrace{\max_{X^* : |X^*| = k} f(X^*)}_{\text{最適値}}$$

最適値

古典貪欲法の解析

補題

f: 劣モジュラ

$$f(X \cup Y) \leq f(X) + \sum_{a \in Y \setminus X} [f(X \cup a) - f(X)]$$

X^*: 最適解

古典貪欲法の解析

$$X_0 = \emptyset$$
$$X_i = X_{i-1} \cup a_i$$
$$a_i \in \mathrm{argmax}_{a \in V \setminus X_{i-1}} f(X_{i-1} \cup a)$$

補題

f: 劣モジュラ

$$f(X \cup Y) \leq f(X) + \sum_{a \in Y \setminus X} [f(X \cup a) - f(X)]$$

補題

各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$f(X_i) - f(X_{i-1}) \geq \frac{1}{k}[f(X^*) - f(X_{i-1})]$$

X^*: 最適解

古典貪欲法の解析

補題

f: 劣モジュラ

$$f(X \cup Y) \leq f(X) + \sum_{a \in Y \setminus X} [f(X \cup a) - f(X)]$$

補題

各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$f(X_i) - f(X_{i-1}) \geq \frac{1}{k}[f(X^*) - f(X_{i-1})]$$

X^*: 最適解

補題

各 $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$f(X^*) - f(X_i) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i f(X^*)$$

古典貪欲法の解析

補題

f: 劣モジュラ

$$f(X \cup Y) \le f(X) + \sum_{a \in Y \setminus X} [f(X \cup a) - f(X)]$$

補題

各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$f(X_i) - f(X_{i-1}) \ge \frac{1}{k}[f(X^*) - f(X_{i-1})]$$

X^*: 最適解

補題

各 $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$f(X^*) - f(X_i) \le \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i f(X^*)$$

定理

$$f(X_k) \ge (1 - 1/e) f(X^*)$$

古典貪欲法 [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]

1: $X_0 \leftarrow \emptyset$
2: **for** $i = 1, \ldots, k$:
3: $\quad a \in V \setminus X_{i-1}$ のうち $f(X_{i-1} \cup a)$ が最大のものを求め，a_i とする．
4: $\quad X_i \leftarrow X_{i-1} \cup a_i$
5: **return** $X = X_k$

- 貪欲アルゴリズムの出力を X とすると，

$$f(X) \geq (1 - 1/e) \max_{X^*:|X^*|=k} f(X^*)$$

最適値

- $O(nk)$ 回の f の関数値評価が必要 ($n = |V|$, k: サイズ制約)
  → **応用によっては重すぎる**

確率的貪欲法 [Mirzasoleiman et al. 2015]

$\epsilon > 0$ を固定．

$X_0 \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \dots, k$:
    $R_i :=V \setminus X_{i-1}$ から $\frac{n}{k} \log \frac{1}{\epsilon}$ 個ランダムサンプル
    $a_i \in \mathrm{argmax}_{a \in R_i} f(X_{i-1} \cup a)$
    $X_i \leftarrow X_{i-1} \cup a_i$
return $X = X_k$

確率的貪欲法 [Mirzasoleiman et al. 2015]

$\epsilon > 0$ を固定．

$X_0 \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \ldots, k$:
  $R_i := V \setminus X_{i-1}$ から $\frac{n}{k} \log \frac{1}{\epsilon}$ 個ランダムサンプル
  $a_i \in \mathrm{argmax}_{a \in R_i} f(X_{i-1} \cup a)$
  $X_i \leftarrow X_{i-1} \cup a_i$
return $X = X_k$

- $\mathbb{E}[f(X)] \geq (1 - 1/e - \epsilon) f(X^*)$
- $O(n \log(1/\epsilon))$ 回の関数値評価
  古典貪欲法の $O(nk)$ に比べて改善！

最大化アルゴリズム

サイズ制約 $|X| \leq k$（組合せ的アルゴリズム）

- 古典貪欲法 [Nemhauser, Wolsey, and Fisher 1978]
- 確率的貪欲法 [Mirzasoleiman et al. 2015]

一般の制約 $X \in \mathcal{C}$（連続最適化的アルゴリズム）

- **連続貪欲法** [Calinescu et al. 2011; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2010; Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2014]

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

①連続緩和 $\rightarrow$

緩和問題

$$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$$

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$

①連続緩和 →

緩和問題

$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$

↓ ②連続貪欲法

$\boldsymbol{x} \in P$

s.t.

$F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$

X^*: 最適解

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

①連続緩和

緩和問題

$$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$$

②連続貪欲法

$$\boldsymbol{x} \in P$$

s.t.

$$F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

③丸め

$$X \in \mathcal{C}$$

s.t.

$$f(X) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

X^*: 最適解

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

①連続緩和

緩和問題

$$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$$

②連続貪欲法

$\boldsymbol{x} \in P$

s.t.

$$F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

③丸め

$X \in \mathcal{C}$

s.t.

$$f(X) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

X^*: 最適解

多重線形拡張(multilinear extension)

f の**多重線形拡張** $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}$

$$F(\boldsymbol{x}) := \sum_{S \subseteq V} f(S) \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i)$$
$$= \mathbb{E}[f(R(\boldsymbol{x}))]$$

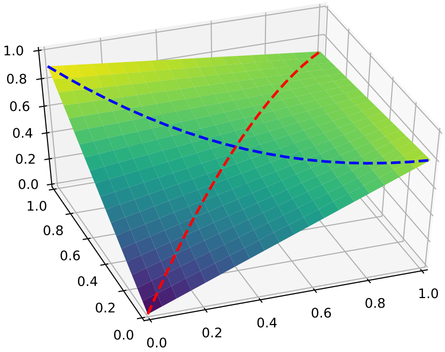
$R(\boldsymbol{x})$: 要素 i を確率 x_i で独立に含むランダム集合

注 $F, \nabla F$ は任意の精度で近似的に求められる (サンプリング).
以下，簡単のため $F, \nabla F$ を与えるオラクルがあるものとする.

多重線形拡張(multilinear extension)

性質

- $F(\mathbf{1}_X) = f(X)$
- f: 単調 $\implies \nabla F \geq \mathbf{0}$
- f: 劣モ $\implies \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0 \ (i \neq j)$
  特に F は非負方向に凹,
  $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ 方向に凸



※一般には**凸でも凹でもない**

多重線型拡張の性質

補題

f: 単調 $\implies \nabla F \geq \mathbf{0}$

$i \in V$ を任意に取る．$\nabla F(\boldsymbol{x})_i$ を計算してみると

$$\nabla F(\boldsymbol{x})_i = \sum_{X \subseteq V \setminus i} f(X \cup i) \Pr(X) - \sum_{X \subseteq V \setminus i} f(X) \Pr(X).$$

ここで，$\Pr(X) = \prod_{k \in X} x_k \prod_{k \notin X : k \neq i} (1 - x_k)$ である．f の単調性より
$f(X \cup i) - f(X) \geq 0$ なので，$\nabla F(\boldsymbol{x})_i \geq 0$.

多重線型拡張の性質

補題

f: 劣モ $\implies \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0 \ (i \neq j)$

特に $\varphi(t) = F(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{d})$ $(\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0})$ は凹関数，$\psi(t) = F(\boldsymbol{x} + t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j))$ は凸関数

$i = j$ の場合は自明に $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. $i \neq j$ のとき，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{X \subseteq V \setminus \{i,j\}} [f(X \cup i \cup j) + f(X) - f(X \cup i) - f(X \cup j)] \Pr(X).$$

ここで，$\Pr(X) = \prod_{k \in X} x_k \prod_{k \notin X : k \neq i,j} (1 - x_k)$ である．劣モジュラ性より

$f(X \cup i \cup j) + f(X) - f(X \cup i) - f(X \cup j) \leq 0$ なので $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \leq 0.$

多重線型拡張の性質

補題

f: 劣モ $\implies \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0 \ (i \neq j)$

特に $\varphi(t) = F(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \ (\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0})$ は凹関数，$\psi(t) = F(\boldsymbol{x} + t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j))$ は凸関数

連鎖律より

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j \in V} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) v_i v_j$$

であるが，$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \leq 0$ で，仮定より $v_i, v_j \geq 0$ であるから，$\varphi''(t) \leq 0$. よって φ は凹関数.

多重線型拡張の性質

補題

f: 劣モ $\implies \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0 \ (i \neq j)$

特に $\varphi(t) = F(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0})$ は凹関数，$\psi(t) = F(\boldsymbol{x} + t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j))$ は凸関数

連鎖律より

$$\varphi''(t) = \sum_{i,j \in V} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) v_i v_j$$

であるが，$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \leq 0$ で，仮定より $v_i, v_j \geq 0$ であるから，$\varphi''(t) \leq 0$. よって φ は凹関数.

再び連鎖律より

$$\psi''(t) = -2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x} + t(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)) \geq 0$$

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$$

①連続緩和

緩和問題

$$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$$

②連続貪欲法

$$\boldsymbol{x} \in P$$

s.t.

$$F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

③丸め

$$X \in \mathcal{C}$$

s.t.

$$f(X) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$$

X^*: 最適解

連続貪欲法 (連続時間版)

連続緩和問題

$$\max \quad F(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in P$$

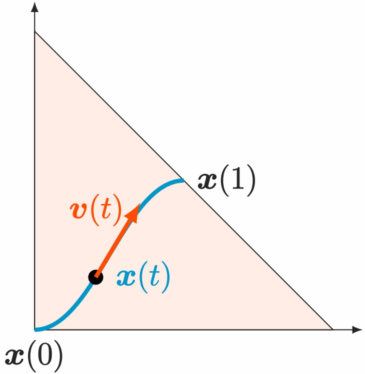
連続貪欲法(連続時間版)

連続緩和問題

$$\max \quad F(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in P$$

以下の微分方程式に従って $\boldsymbol{x}(t)$ を動かす

$$\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$$
$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{v} \in P} \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \boldsymbol{v}$$



連続貪欲法(連続時間版)

連続緩和問題

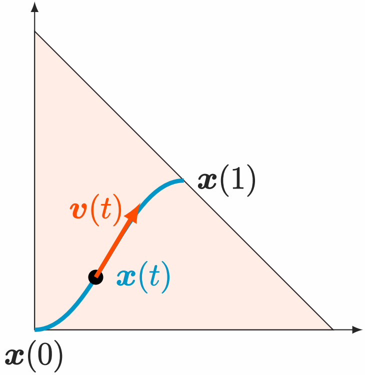
$$\max \quad F(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in P$$

以下の微分方程式に従って $\boldsymbol{x}(t)$ を動かす

$$\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$$
$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{v} \in P} \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \boldsymbol{v}$$

定理 ([Calinescu et al. 2011])

f: 単調劣モ, P: down closed
$\implies \boldsymbol{x}(1) \in P$ かつ
$F(\boldsymbol{x}(1)) \geq (1 - 1/e) \max_{\boldsymbol{x}^* \in P} F(\boldsymbol{x}^*)$

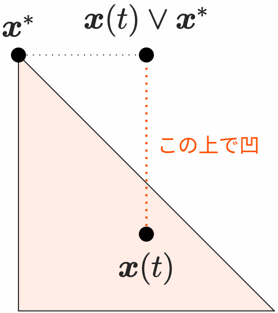


解析

$\Psi(t) := e^{t-1}F(\boldsymbol{x}(t))$ とする. $\frac{d\Psi}{dt} = e^{t-1}[F(\boldsymbol{x}(t)) + \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}]$.

$\boldsymbol{x}^* \in P$ を最適解, $\boldsymbol{x}^* \vee \boldsymbol{x}(t)$ を $\boldsymbol{x}^*$ と $\boldsymbol{x}(t)$ の成分ごとに max をとったベクトルとする.

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}^*) &\le F(\boldsymbol{x}^* \vee \boldsymbol{x}(t)) \\
&\le F(\boldsymbol{x}(t)) + \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top (\boldsymbol{x}^* \vee \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t)) \\
&\le F(\boldsymbol{x}(t)) + \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \boldsymbol{v}(t) \\
&= F(\boldsymbol{x}(t)) + \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}
\end{aligned}
$$



$\therefore \frac{d\Psi}{dt} \ge e^{t-1}F(\boldsymbol{x}^*)$.

$[0,1]$ で積分: $\Psi(1) - \Psi(0) = F(\boldsymbol{x}(1)) \ge (1 - e^{-1})F(\boldsymbol{x}^*)$.

連続貪欲法(離散時間版)

実際には微分方程式を厳密に解くことはできないので，時間を離散化して近似する

$\boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$
for $t = 0, \delta, 2\delta, \ldots, 1-\delta$:
　$\boldsymbol{v}(t) \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{v} \in P} \nabla F(\boldsymbol{x}(t))^\top \boldsymbol{v}$ を求める
　$\boldsymbol{x}(t+\delta) \leftarrow \boldsymbol{x}(t) + \delta \boldsymbol{v}(t)$
return $\boldsymbol{x}(1)$

- Frank-Wolfe 法の亜種
- 精度 $\epsilon > 0$ に応じて 時間幅 δ を十分小さく取れば，同様の仮定のもと $F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e - \epsilon) \max_{\boldsymbol{x}^* \in P} F(\boldsymbol{x}^*)$

連続貪欲法 [Calinescu et al. 2011]

元問題

$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}$

①連続緩和 →

緩和問題

$\max\{F(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in P\}$

②連続貪欲法 ↓

$\boldsymbol{x} \in P$

s.t.

$F(\boldsymbol{x}) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$

← ③丸め

$X \in \mathcal{C}$

s.t.

$f(X) \geq (1 - 1/e) f(X^*)$

X^*: 最適解

丸めアルゴリズム

連続貪欲法で得られる緩和解 $\boldsymbol{x}$ は $\{0,1\}$ ベクトルとは限らないので，
$\{0,1\}$ ベクトルに丸める必要がある.
→**制約ごとに丸めアルゴリズムを設計**

マトロイド制約

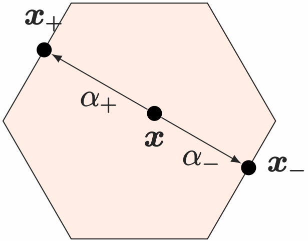
- Pipage Rounding [Calinescu et al. 2011]
- Swap Rounding [Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2010]

その他の制約

- Contention Resolution Scheme [Chekuri, Vondrák, and Zenklusen 2014]

Pipage Rounding [Calinescu et al. 2011]

1. x_i, x_j が{0,1} でない $i, j \in V$ を取る
2. $\alpha_+ = \max\{\alpha \geq 0 : \boldsymbol{x} + \alpha(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \in P\}$
   $\alpha_- = \max\{\alpha \geq 0 : \boldsymbol{x} - \alpha(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \in P\}$
3. $\boldsymbol{x}_+ = \boldsymbol{x} + \alpha_+(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$, $\boldsymbol{x}_- = \boldsymbol{x} - \alpha_-(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ のうち F の値が大きいものに $\boldsymbol{x}$ を更新
4. P をぶつかった面に制限して 1 に戻る



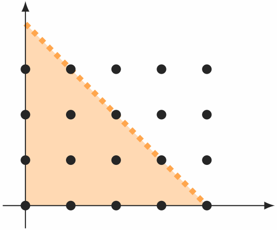
定理

P: マトロイド多面体のとき，Pipage Rounding の出力 $\overline{\boldsymbol{x}}$ は $\{0, 1\}$ ベクトルで，$F(\overline{\boldsymbol{x}}) \geq F(\boldsymbol{x})$ を満たす（$\boldsymbol{x}$: Pipage Rounding の初期点）

劣モジュラ最大化: 発展的な話題

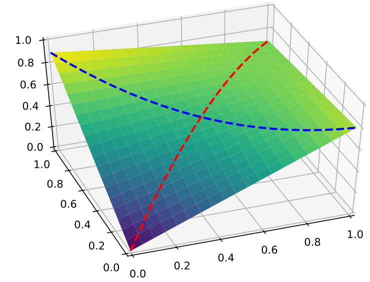
整数格子点上の劣モジュラ最大化

- 最適予算配分問題
- 最大化アルゴリズム



連続劣モジュラ関数

- 非凸連続最適化（**連続 DR 劣モジュラ関数**）



オンライン劣モジュラ最大化

- 近似 no-regret アルゴリズム
- 連続 DR 劣モジュラ関数の CVaR 最大化

参考文献

Calinescu, G., C. Chekuri, M. Pál, and J. Vondrák (2011). “Maximizing a monotone submodular function subject to a matroid constraint”. In: *SIAM Journal on Computing* 40.6, pp. 1740–1766.

Chekuri, C., J. Vondrák, and R. Zenklusen (2010). “Dependent randomized rounding via exchange properties of combinatorial structures”. In: *Proceedings of IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp. 575–584.

— (2014). “Submodular function maximization via the multilinear relaxation and contention resolution schemes”. In: *SIAM Journal on Computing* 43.6, pp. 1831–1879.

Das, A. and D. Kempe (2011). “Submodular meets spectral: greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection”. In: *Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning (ICML)*, pp. 1057–1064.

Elenberg, E. R., R. Khanna, A. G. Dimakis, and S. Negahban (2018). “Restricted strong convexity implies weak submodularity”. In: *Annals of Statistics* 46.6B, pp. 3539–3568.

Lin, H. and J. Bilmes (2011). “A class of submodular functions for document summarization”. In: *Proceedings of the Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*, pp. 510–520.

Mirzasoleiman, B., A. Badanidiyuru, A. Karbasi, J. Vondrak, and A. Krause (2015). “Lazier than lazy greedy”. In: *Proceedings of AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*.

Nemhauser, G. L. and L. A. Wolsey (1978). “Best Algorithms for Approximating the Maximum of a Submodular Set Function”. In: *Mathematics of Operations Research* 3.3, pp. 177–188.

Nemhauser, G. L., L. A. Wolsey, and M. L. Fisher (1978). “An analysis of approximations for maximizing submodular set functions - II”. In: *Mathematical Programming* 8, pp. 73–87.

Ribeiro, M. T., S. Singh, and C. Guestrin (2016). “"Why should i trust you?" Explaining the predictions of any classifier”. In: *Proceedings of the ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, pp. 1135–1144.

Sviridenko, M. (2004). “A note on maximizing a submodular set function subject to a knapsack constraint”. In: *Operations Research Letters* 32.1, pp. 41–43.