

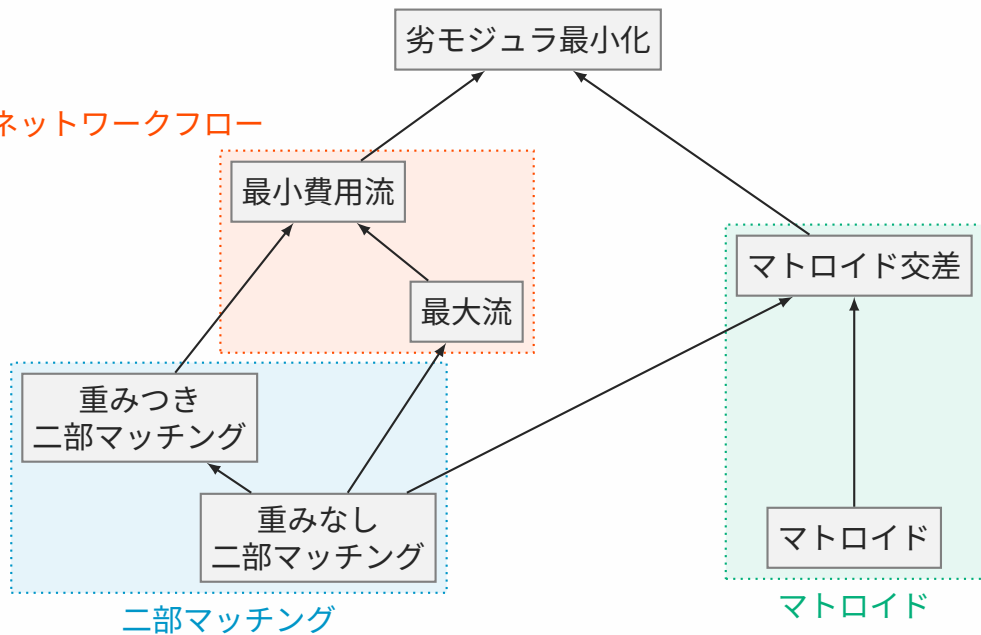
組合せ最適化特論

第9回 (劣モジュラ関数①)

担当: 相馬 輔

2026/7/14

ネットワークフロー



各回の内容（予定） I

- ① (4/23) イントロ+多面体的組合せ論（線形計画法の復習，整数多面体，完全単模行列）

(4/30) 休み

- ② (5/7) 二部マッチング①（Konig-Egervary の定理，増加道アルゴリズム，ハンガリー法）
- ③ (5/14) 二部マッチング②（最短路問題の復習，逐次最短路法と主双対法，最適性基準からの見方）
- ④ (5/21) 最大流①（定式化，最大流最小カット定理，応用例）
- ⑤ (5/28) 最大流②（残余ネットワーク，Ford-Fulkerson 法，Edmonds-Karp のアルゴリズム）+ 最小費用流①（定式化，輸送問題，最大流との関係）

各回の内容（予定） II

(6/4) 休み

- ⑥ (6/11) 最小費用流②（逐次最短路法，容量スケーリング法）

(6/18) 休み

(6/25) 休み

- ⑦ (7/2) マトロイド（定義と公理系，貪欲法，マトロイド多面体）
- ⑧ (7/9) 独立マッチング・マトロイド交差（定義，応用例，Edmonds の最大最小定理，増加道アルゴリズム）
- ⑨ (7/14) 劣モジュラ関数①（諸例，劣モジュラ基多面体，Lovász 拡張，劣モジュラ最小化）
- ⑩ (7/16) 劣モジュラ関数②（劣モジュラ最大化，近似アルゴリズム，貪欲法）

各回の内容（予定） III

⑪ (7/24) 精選トピック①

⑫ (7/28) 精選トピック②

⑬ (7/30) 精選トピック③

- レポート課題を6月と期末に出す予定

目次

1. 劣モジュラ関数

- 定義
- 諸例

2. 基多面体と Lovász 拡張

- 基多面体
- 貪欲法
- Lovász 拡張

3. 最小ノルム点法

- パラメトリック劣モジュラ最小化
- L_2 正則化 Lovász 拡張最小化
- 最小ノルム点法

目次

1. 劣モジュラ関数

- 定義
- 諸例

2. 基多面体と Lovász 拡張

- 基多面体
- 貪欲法
- Lovász 拡張

3. 最小ノルム点法

- パラメトリック劣モジュラ最小化
- L_2 正則化 Lovász 拡張最小化
- 最小ノルム点法

劣モジュラ関数

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ関数

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

劣モジュラ関数

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ関数

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

$$\iff \forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y,$$

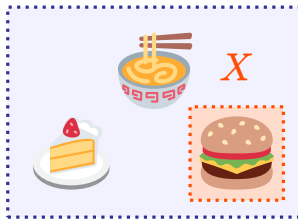
$$f(X \cup a) - f(X) \geq f(Y \cup a) - f(Y)$$

小さい集合の増分

大きい集合の増分

限界効用逓減性

Y



X

a



劣モジュラ関数

- f_1, f_2 劣モジュラ関数, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$
 $\implies \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ も劣モジュラ関数

劣モジュラ関数

- f_1, f_2 劣モジュラ関数, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$
 $\implies \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ も劣モジュラ関数

- 特に,

$$f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

が成り立つ場合, f を **モジュラ関数** という.

例: $f(X) = |X|$ や, 重み $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対する $f(X) = w(X)$ など.

劣モジュラ関数

- f_1, f_2 劣モジュラ関数, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$
 $\implies \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ も劣モジュラ関数

- 特に,

$$f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

が成り立つ場合, f を**モジュラ関数**という.

例: $f(X) = |X|$ や, 重み $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対する $f(X) = w(X)$ など.

- $-f$ が劣モジュラである関数を**優モジュラ関数**という. すなわち,

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

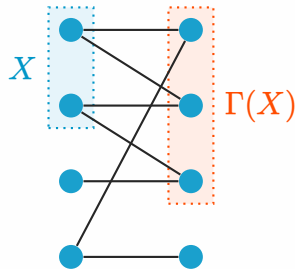
が成り立つ関数.

例 1: 被覆関数 (coverage function)

$G = (V^+, V^-; E)$... 2部グラフ

$$f(X) = |\Gamma(X)|$$

($\Gamma(X)$: $X \subseteq V^+$ の隣接頂点)

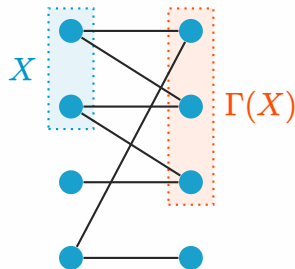


例 1: 被覆関数 (coverage function)

$G = (V^+, V^-; E)$... 2部グラフ

$$f(X) = |\Gamma(X)|$$

($\Gamma(X)$: $X \subseteq V^+$ の隣接頂点)



重み付き版

$w : V^- \rightarrow \mathbb{R}_+$: 非負重み

$$f(X) = w(\Gamma(X))$$

例2: 凹関数と線形関数の合成

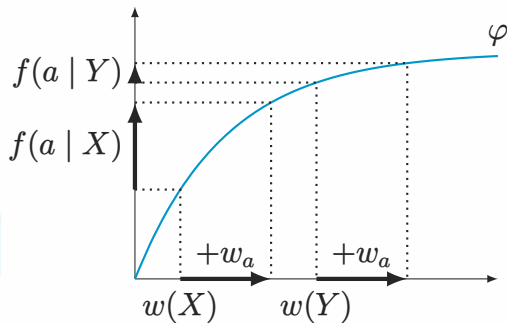
$$V = \{1, \dots, n\}$$

$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \dots$ 凹関数

$w : V \rightarrow \mathbb{R}_+ \dots$ 非負重み

$$f(X) = \varphi(w(X))$$

- $f(X) = \sqrt{w(X)}$ など



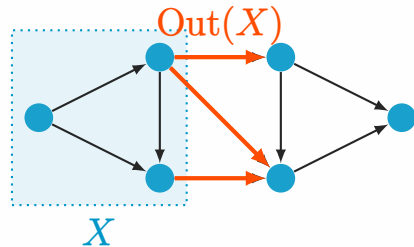
例3: グラフのカット関数

有向カット関数

$G = (V, A) \dots$ 有向グラフ

$u : A \rightarrow \mathbb{R}_+ \dots$ 非負枝重み

$$f(X) = u(\text{Out}(X)) \quad (X \subseteq V)$$

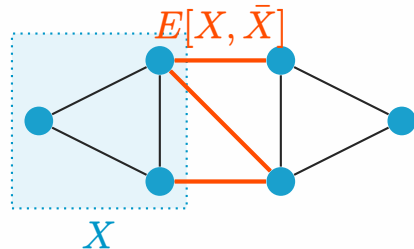


無向カット関数

$G = (V, E) \dots$ 無向グラフ

$u : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \dots$ 非負枝重み

$$f(X) = u(E[X, \bar{X}]) \quad (X \subseteq V)$$



限界効用逓減性

記号 $f(a \mid X) := f(X \cup a) - f(X)$ ($X \subseteq V, a \in V \setminus X$)

..... X に a を追加したときの増分

補題

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ $\iff f(a \mid X) \geq f(a \mid Y)$ ($\forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y$)

(証明) $[\implies]$ $X \cup a$ と Y に対し, 劣モジュラ性を使うと

$$\begin{aligned} f(X \cup a) + f(Y) &\geq f((X \cup a) \cup Y) + f((X \cup a) \cap Y) \\ &= f(Y \cup a) + f(X). \end{aligned}$$

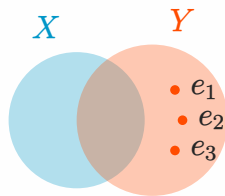
移項すると限界効用逓減性が出る.

証明の続き

[$\Leftarrow$] 任意の $X, Y \subseteq V$ を取る. $Y \setminus X = \emptyset$ の場合は自明なので,
 $Y \setminus X \neq \emptyset$ と仮定して良い. $Y \setminus X = \{e_1, \dots, e_\ell\}$ ($\ell \geq 1$) とおく.

$$S_i = (X \cap Y) \cup \{e_1, \dots, e_i\}, \quad T_i = X \cup \{e_1, \dots, e_i\}$$

($i = 1, \dots, \ell$) とする. また, $S_0 = X \cap Y, T_0 = X$ と定義する.



証明の続き

【 $\Leftarrow$ 】 任意の $X, Y \subseteq V$ を取る. $Y \setminus X = \emptyset$ の場合は自明なので, $Y \setminus X \neq \emptyset$ と仮定して良い. $Y \setminus X = \{e_1, \dots, e_\ell\}$ ($\ell \geq 1$) とおく.

$$S_i = (X \cap Y) \cup \{e_1, \dots, e_i\}, \quad T_i = X \cup \{e_1, \dots, e_i\}$$

($i = 1, \dots, \ell$) とする. また, $S_0 = X \cap Y, T_0 = X$ と定義する.

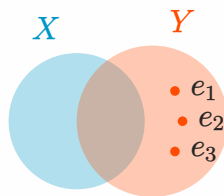
このとき, $S_{i-1} \subseteq T_{i-1}, e_i \notin T_{i-1}$ ($\forall i$) である. 限界効用逓減性より

$$f(S_{i-1} \cup e_i) - f(S_{i-1}) \geq f(T_{i-1} \cup e_i) - f(T_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

この式を i に対して足し上げると

$$f(S_\ell) - f(S_0) \geq f(T_\ell) - f(T_0).$$

$S_\ell = Y, S_0 = X \cap Y, T_\ell = X \cup Y, T_0 = X$ なので, 劣モジュラ性が得られる.



劣モジュラ関数最小化

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ 劣モジュラ関数, $f(\emptyset) = 0$

劣モジュラ関数最小化

minimize $f(X)$ subject to $X \subseteq V$

劣モジュラ関数最小化

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ 劣モジュラ関数, $f(\emptyset) = 0$

劣モジュラ関数最小化

$$\text{minimize } f(X) \quad \text{subject to } X \subseteq V$$

例:

- König–Egerváry: $\max_{M: \text{マッチング}} |M| = \min_{X \subseteq V^+} |V^+ \setminus X| + |\Gamma(X)|$
- 最大流最小カット定理: $\max_{\varphi: s \rightarrow t \text{ フロー}} \text{val}(\varphi) = \min_{s \in X \subseteq V - t} u(\text{Out}(X))$
- 独立マッチング: $\max_{M: \text{独立マッチング}} |M| = \min_{X \subseteq V^+} r^+(V^+ \setminus X) + r^-(\Gamma(X))$

劣モジュラ関数最小化

$f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ 劣モジュラ関数, $f(\emptyset) = 0$

劣モジュラ関数最小化

minimize $f(X)$ subject to $X \subseteq V$

アルゴリズム

組合せ的なもの・連続最適化によるものなど様々な技法がある

- Grötschel–Lovász–Schrijver (1981): **Lovász 拡張** + 橢円体法
- 岩田–Fleischer–藤重 (2000, 2001), Schrijver (2000): 組合せ的
- Lee–Sidford–Wong (2015): 切除平面法

目次

1. 劣モジュラ関数

- 定義
- 諸例

2. 基多面体と Lovász 拡張

- 基多面体
- 貪欲法
- Lovász 拡張

3. 最小ノルム点法

- パラメトリック劣モジュラ最小化
- L_2 正則化 Lovász 拡張最小化
- 最小ノルム点法

基多面体

定義

$$P(f) := \{x \in \mathbb{R}^V : x(X) \leq f(X) \ (\forall X \subseteq V)\} \quad \text{劣モジュラ多面体}$$

$$B(f) := \{x \in P(f) : x(V) = f(V)\} \quad \text{劣モジュラ基多面体}$$

cf. マトロイド多面体・基多面体 (第7回)

$$P(\mathbf{M}) := \{x \in \mathbb{R}_+^E : x(X) \leq r(X) \ (\forall X \subseteq E)\}$$

$$B(\mathbf{M}) := \{x \in P(\mathbf{M}) : x(E) = r(E)\}$$

基多面体上の線形最適化

$$w \in \mathbb{R}^V$$

$$\text{maximize } w^\top x \quad \text{subject to } x \in B(f)$$

基多面体上の線形最適化

$$w \in \mathbb{R}^V$$

$$\text{maximize } w^\top x \quad \text{subject to } x \in B(f)$$

貪欲法

- 1: V の要素を w の降順に並べる: $w(v_1) \geq \dots \geq w(v_n)$ ($n = |V|$).
- 2: $x \in \mathbb{R}^V$ を次のように定める: $x(v_i) := f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\})$ ($i = 1, \dots, n$)

マトロイドの最小重み基に対する貪欲法（第7回）の一般化

基多面体上の線形最適化

$$w \in \mathbb{R}^V$$

$$\text{maximize } w^\top x \quad \text{subject to } x \in B(f)$$

貪欲法

- 1: V の要素を w の降順に並べる: $w(v_1) \geq \dots \geq w(v_n)$ ($n = |V|$).
- 2: $x \in \mathbb{R}^V$ を次のように定める: $x(v_i) := f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\})$ ($i = 1, \dots, n$)

マトロイドの最小重み基に対する貪欲法（第7回）の一般化

定理

貪欲法における x は基多面体上の線形最適化の最適解である。

定理の証明 (1/3)

$[x \in B(f)]$ であること] まず, $\forall X \subseteq V$ に対し, $x(X) \leq f(X)$ を示す.

$$\begin{aligned} x(X) &= \sum_{i:v_i \in X} f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\}) \\ &\leq \sum_{i:v_i \in X} f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \cap X) \\ &= f(X) - f(\emptyset) = f(X) \end{aligned}$$

また, 定義から

$$x(V) = \sum_{i=1}^n f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\}) = f(V) - f(\emptyset) = f(V).$$

$\therefore x \in B(f).$

定理の証明 (2/3)

[x が最適であること] $y \in B(f)$ を任意に取る． $w^\top x - w^\top y \geq 0$ を示したい．

$$w^\top x - w^\top y = \sum_{i=1}^n (x(v_i) - y(v_i))w(v_i)$$

定理の証明 (2/3)

[x が最適であること] $y \in B(f)$ を任意に取る. $w^\top x - w^\top y \geq 0$ を示したい.

$$w^\top x - w^\top y = \sum_{i=1}^n (x(v_i) - y(v_i))w(v_i)$$

Abel 変形

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_{i+1} - b_i) \quad \text{ここで } S_i := \sum_{j \leq i} a_j$$

定理の証明 (2/3)

[x が最適であること] $y \in B(f)$ を任意に取る． $w^\top x - w^\top y \geq 0$ を示したい．

$$w^\top x - w^\top y = \sum_{i=1}^n (x(v_i) - y(v_i))w(v_i)$$

Abel 変形

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_{i+1} - b_i) \quad \text{ここで } S_i := \sum_{j \leq i} a_j$$

$$w^\top x - w^\top y = S_n w(v_n) - \sum_{i=1}^{n-1} S_i (w(v_{i+1}) - w(v_i))$$

よって， $S_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n-1$) を示せばよい．

定理の証明 (3/3)

Claim. $S_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n - 1$)

($\because$)

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^i (x(v_j) - y(v_j)) \\ &= \sum_{j=1}^i f(v_j \mid \{v_1, \dots, v_{j-1}\}) - y(\{v_1, \dots, v_i\}) \\ &= f(\{v_1, \dots, v_i\}) - y(\{v_1, \dots, v_i\}) \geq 0 \end{aligned} \quad (y \in B(f))$$



Lovász 拡張

定義

$\hat{f} : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f}(w) := \max_{x \in B(f)} w^\top x$ を **Lovász 拡張** という.

貪欲法の解を代入すると,

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \sum_{i=1}^n w(v_i) f(v_i \mid \{v_1, \dots, v_{i-1}\}) \\ &= f(V)w(v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\{v_1, \dots, v_i\})(w(v_i) - w(v_{i+1}))\end{aligned}$$

Lovász 拡張

$$\hat{f}(w) = f(V)w(v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\{v_1, \dots, v_i\})(w(v_i) - w(v_{i+1}))$$

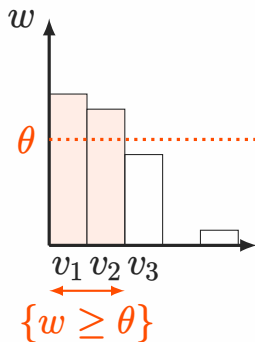
特に $w \in [0, 1]^V$ に限ると，次式になる：

$$\hat{f}(w) = \mathbb{E}_{\theta \sim [0,1]} [f(\{w \geq \theta\})]$$

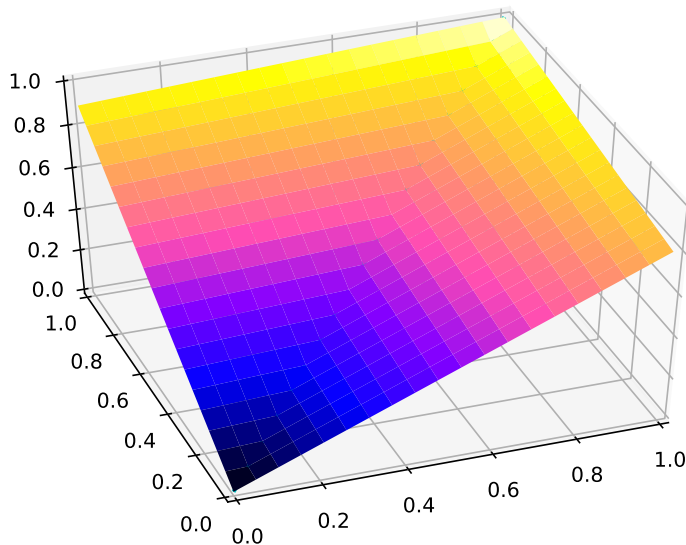
ここで， $\theta \sim [0, 1]$ は一様分布に従う確率変数．また，略記

$$\{w \geq \theta\} := \{v \in V : w(v) \geq \theta\}$$

を用いた．



Lovász 拡張の例



Lovász 拡張の性質

定理 (Lovász 1983)

- ① $\hat{f}$ は凸関数.
- ② $\hat{f}(\mathbf{1}_X) = f(X)$ ($X \subseteq V$)
- ③ $\min_{w \in [0,1]^V} \hat{f}(w) = \min_{X \subseteq V} f(X)$

定理より, 凸関数 $\hat{f}$ の最小化で劣モジュラ関数 f の最小化ができる.

→ 楕円体法 [GLS81]

Lovász 拡張の性質

定理 (Lovász 1983)

- ① $\hat{f}$ は凸関数.
- ② $\hat{f}(\mathbf{1}_X) = f(X)$ ($X \subseteq V$)
- ③ $\min_{w \in [0,1]^V} \hat{f}(w) = \min_{X \subseteq V} f(X)$

定理より, 凸関数 $\hat{f}$ の最小化で劣モジュラ関数 f の最小化ができる.

→ 楕円体法 [GLS81]

(証明)

- ① $\hat{f}(w) = \max_{x \in B(f)} w^\top x$ であり, 一般に複数の線形関数の最大値は凸関数.
- ② 期待値の式から自明.
- ③ ②より 左辺 $\leq$ 右辺. 一方, $w \in [0,1]^V$ に対し $\hat{f}(w) = \mathbb{E}[f(\dots)] \geq$ 右辺.

目次

1. 劣モジュラ関数

- 定義
- 諸例

2. 基多面体と Lovász 拡張

- 基多面体
- 貪欲法
- Lovász 拡張

3. 最小ノルム点法

- パラメトリック劣モジュラ最小化
- L_2 正則化 Lovász 拡張最小化
- 最小ノルム点法

最小ノルム点法

パラメトリック劣モ最小化

$$\min_{X \subseteq V} f(X) + \alpha |X| \quad (\text{SFM}_\alpha)$$

定理

L_2 正則化 Lovász 拡張最小化

$$\min_{w \in \mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (\text{P})$$

等価 ($w^* = -x^*$)

最小ノルム点

$$\min_{x \in B(f)} \|x\|^2$$

Wolfe のアルゴリズム
(藤重-Wolfe 法)
実用上最速

⋮

パラメトリック劣モジュラ最小化

$$\min_{X \subseteq V} f(X) + \alpha |X| \quad (\text{SFM}_\alpha)$$

パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ は動く

Claim. A_α : (SFM_α) の最適解とすると, $\alpha < \beta \implies A_\alpha \supseteq A_\beta$.

パラメトリック劣モジュラ最小化

$$\min_{X \subseteq V} f(X) + \alpha |X| \quad (\text{SFM}_\alpha)$$

パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}$ は動く

Claim. A_α : (SFM_α) の最適解とすると, $\alpha < \beta \implies A_\alpha \supseteq A_\beta$.

($\because$) A_α, A_β がそれぞれ最適解であることから,

$$\begin{aligned} f(A_\alpha) + \alpha |A_\alpha| &\leq f(A_\alpha \cup A_\beta) + \alpha |A_\alpha \cup A_\beta|, \\ f(A_\beta) + \beta |A_\beta| &\leq f(A_\alpha \cap A_\beta) + \beta |A_\alpha \cap A_\beta|. \end{aligned}$$

足して、移項すると

$$(\beta - \alpha) |A_\beta \setminus A_\alpha| \leq f(A_\alpha \cup A_\beta) + f(A_\alpha \cap A_\beta) - f(A_\alpha) - f(A_\beta) \leq 0$$

$\beta - \alpha > 0$ より, $|A_\beta \setminus A_\alpha| = 0$.



L_2 正則化 Lovász 拡張最小化

$$\min_{w \in \mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (\text{P})$$

A_α : (SFM_α) の最適解.

定理

$w \in \mathbb{R}^V$ を $w(v) := \sup\{\alpha : v \in A_\alpha\}$ と定めると, w は (P) の一意な最適解である.

L_2 正則化 Lovász 拡張最小化

$$\min_{w \in \mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (\text{P})$$

A_α : (SFM_α) の最適解.

定理

$w \in \mathbb{R}^V$ を $w(v) := \sup\{\alpha : v \in A_\alpha\}$ と定めると, w は (P) の一意な最適解である.

系: w^* : (P) の (一意) 最適解とする.

- $\{w^* \geq \alpha\}$ は (SFM_α) の最適解
全ての α に対し, (SFM_α) の最適解が得られる!
- 特に, $\alpha = 0$ とすると, 次が得られる:
 $\{w^* \geq 0\}$ は劣モジユラ最小化 $\min_{X \subseteq V} f(X)$ の最適解

定理の証明 (1/2)

Claim. ほとんどすべての α について $A_\alpha = \{w \geq \alpha\}$.

Claim. $\hat{f}(w) + \frac{1}{2}\|w\|^2 \leq \hat{f}(w') + \frac{1}{2}\|w'\|^2$ ($\forall w' \in \mathbb{R}^V$)

定理の証明 (1/2)

Claim. ほとんどすべての α について $A_\alpha = \{w \geq \alpha\}$.

($\because$) w の定義から,

- $w(v) < \alpha \implies v \notin A_\alpha.$

$$\therefore A_\alpha \subseteq \{w \geq \alpha\}.$$

- $w(v) > \alpha \implies \alpha < \exists \beta < w(v) \text{ s.t. } v \in A_\beta.$

Claim 「 $\alpha < \beta \implies A_\alpha \supseteq A_\beta$ 」 より, $v \in A_\alpha.$

$$\therefore \{w > \alpha\} \subseteq A_\alpha.$$

よって, $\{w > \alpha\} \subseteq A_\alpha \subseteq \{w \geq \alpha\}$ が成り立つ.



Claim. $\hat{f}(w) + \frac{1}{2}\|w\|^2 \leq \hat{f}(w') + \frac{1}{2}\|w'\|^2 \ (\forall w' \in \mathbb{R}^V)$

定理の証明 (2/2)

($\because$) 任意の $w' \in \mathbb{R}^V$ に対し, $\beta < 0$ を十分小さく取ると,

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) + \frac{1}{2}\|w\|^2 &= \int_{\beta}^{+\infty} f(\{w \geq \alpha\})d\alpha + \beta f(V) + \sum_{v \in V} \left[\int_{\beta}^{w(v)} \alpha d\alpha + \frac{1}{2}\beta^2 \right] \\ &= \text{const.} + \int_{\beta}^{+\infty} \left[f(\{w \geq \alpha\}) + \sum_{v \in V} \alpha \mathbf{1}_{w(v) \geq \alpha} \right] d\alpha \\ &= \text{const.} + \int_{\beta}^{+\infty} \left[f(A_{\alpha}) + \alpha |A_{\alpha}| \right] d\alpha && (A_{\alpha} = \{w \geq \alpha\} \text{ a.e.}) \\ &\leq \text{const.} + \int_{\beta}^{+\infty} \left[f(\{w' \geq \alpha\}) + \alpha |\{w' \geq \alpha\}| \right] d\alpha && (A_{\alpha} \text{ は } [\dots] \text{ の最小解}) \\ &= \hat{f}(w') + \frac{1}{2}\|w'\|^2 \quad \square\end{aligned}$$

最小ノルム点

補題

$$\min_{w \in \mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \|w\|^2 = -\frac{1}{2} \min_{x \in B(f)} \|x\|^2$$

特に，それぞれの（一意）最適解 w^*, x^* に対し $w^* = -x^*$ が成り立つ．

最小ノルム点

補題

$$\min_{w \in \mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2} \|w\|^2 = -\frac{1}{2} \min_{x \in B(f)} \|x\|^2$$

特に、それぞれの（一意）最適解 w^*, x^* に対し $w^* = -x^*$ が成り立つ.

(証明) 凸解析における minimax 定理を使う:

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$: コンパクト凸集合

$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$: x について凸関数, y について凹関数

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

(詳細はレポート問題)



まとめ: 劣モジュラ最小化

まとめ

- 劣モジュラ関数, 基多面体, Lovász 拡張の定義
- 最小ノルム点法とパラメトリック劣モジュラ最小化

参考文献

- 河原・永野『劣モジュラ最適化と機械学習』(2015)
- F. Bach “Learning with Submodular Functions: A Convex Optimization Perspective” (2013)