$f: 2^V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\emptyset) = 0$, 劣モジュラ

$$\boxed{\min \ f(X) \quad \text{s.t. } X \subseteq V}$$

例) • König-Egervary $\displaystyle \max_{M\text{マッチング}} |M| = \min_{X \subseteq V^+} |\Gamma(X)| + |V^+ \setminus X|$

• 最大流最小カット $\displaystyle \max_{\varphi:\, st\text{フロー}} \mathrm{val}(\varphi) = \min_{s \in X \subseteq V - t} \mathrm{cut}(X)$

• マトロイド交差 $\displaystyle \max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{X \subseteq E} r_1(X) + r_2(E - X)$

組合せ的・連続最適化など様々な技法あり.

Grötschel-Lovász-Schrijver (1981) Lovász拡張+楕円体法

岩田-Fleischer-藤重 (2000, 2001) } 組合せ的

Schrijver (2000)

Lee-Sidford-Wong (2015) 切除平面法

Def $P(f) = \{x \in \mathbb{R}^V : x(X) \le f(X) \quad (X \subseteq V)\}$ (劣モジュラ多面体)

$B(f) = \{x \in P(f) : x(V) = f(V)\}$ (基多面体)

cf. マトロイド多面体 $P_M = \{x \in \mathbb{R}^E : x(X) \le r_M(X) \ (X \subseteq E),\ x \ge 0\}$

$B_M = \{x \in P_M : x(E) = r_M(E)\}$

$B(f)$ は f の情報を全て含んでいる!

基多面体上の線形最適化

$w \in \mathbb{R}^V$

$\max \ w^T x \quad \text{s.t. } x \in B(f)$ (LP)

Greedy algorithm:

$w(v_1) \ge w(v_2) \ge \cdots \ge w(v_n)$ とする.

$x \in \mathbb{R}^V$ を次のように定める:

$x(v_i) := f(v_i \mid \{v_1, \cdots, v_{i-1}\})$

Thm 上の x は (LP) の最適解.

(pf) $x \in B(f)$ であること:

$\forall X \subseteq V$ に対し $x(X) \le f(X)$ を示せばよい.

$$x(X) = \sum_{i:\, v_i \in X} f(v_i \mid \{v_1, \cdots, v_{i-1}\})$$

$$\le \sum_{i:\, v_i \in X} f(v_i \mid \{\ \text{〃}\ \} \cap X) = f(X).$$

最適であること:

$\forall y \in B(f)$ を取る.

$$w^T x - w^T y = \sum_{i=1}^{n} (x(v_i) - y(v_i)) w(v_i)$$

Abel和

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_{i+1} - b_i)$$

ここで $A_i = a_1 + \cdots + a_i$

ここで $A_i = a_1 + \cdots + a_i$

${}^\forall y \in B(f)$ を取る.

$$w^T x - w^T y = \sum_{i=1}^{n} (x(v_i) - y(v_i))\, w(v_i)$$

$$= \underbrace{S_n}_{=0} w(v_n) - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \underbrace{(w(v_{i+1}) - w(v_i))}_{\leq 0} \qquad \left[S_i := \sum_{j \leq i} (x(v_j) - y(v_j)) \right]$$

よって $S_i \geq 0$ を示せばよい.

$$S_i = \sum_{j \leq i} (x(v_j) - y(v_j)) = \sum_{j \leq i} f(v_j \mid \{v_1, \cdots, v_{j-1}\}) - y(\{v_1, \cdots, v_i\})$$

$$= f(\{v_1, \cdots, v_i\}) - y(\quad " \quad) \geq 0. \qquad \square$$

<u>Cor</u> (LP) は $O(n \log n)$ 時間で解ける.

Lovász 拡張

$\hat{f} : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$, $\quad \hat{f}(w) = \max_{x \in B(f)} w^T x$ を <u>Lovász 拡張</u>という.

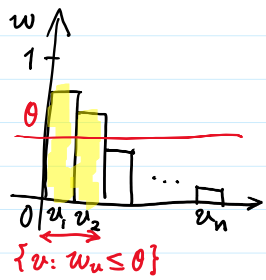
上の greedy algorithm の解を代入すると

$$\hat{f}(w) = \sum_{i=1}^{n} w(v_i) \cdot f(v_i \mid \{v_1, \cdots, v_{i-1}\})$$

$$= f(V)\, w(v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\{v_1, \cdots, v_i\}) (w(v_i) - w(v_{i+1}))$$

特に $w \in [0,1]^V$ に限ると次のようになる:

$$\boxed{\hat{f}(w) = \mathop{\mathbb{E}}_{\theta \sim [0,1]} \left[f(\{v : w(v) \geq \theta\}) \right]}$$



<u>Prop</u>
(1) $\hat{f}$ は 凸関数
(2) $\hat{f}(\mathbb{1}_X) = f(X) \qquad ({}^\forall X \subseteq V)$
(3) $\min_{w \in [0,1]^V} \hat{f}(w) = \min_{X \subseteq V} f(X)$

(pf) (1), (2) は trivial.
(3) は (2) より LHS $\leq$ RHS.
一方 $\hat{f}(w) = \mathbb{E}[f(\cdots)] \geq$ RHS $\qquad ({}^\forall w \in [0,1]^V)$
$\therefore$ LHS $\geq$ RHS. $\square$

これより 劣モ最小化 は Lovász 拡張の最小化 をすればよい.
→ だ円体法 [GLS]

最小ノルム点アルゴリズム

parametric 劣モ最小化
$\min_{X \subseteq V} f(X) + \alpha \lvert X \rvert \qquad (\mathrm{SFM}_\alpha)$

α は いろいろ変化する.

Thm

Wolfe のアルゴリズム
(藤重-Wolfe 法)

最小ノルム点

Thm

$$\min_{w\in\mathbb{R}^V} \hat{f}(w) + \frac{1}{2}\|w\|^2 \quad (\mathrm{P}) \quad \overset{等価}{\underset{w=-x}{\longleftrightarrow}} \quad \text{最小ノルム点} \quad \min \|x\|^2 \ \text{s.t.}\ x\in B(f)$$

Wolfe のアルゴリズム
(藤重-Wolfe法)
実用上最速

Thm A_α : (SFM_α) の最適解 (どれでもよい)
$w\in\mathbb{R}^V$ を $w(i) = \sup\{\alpha : i\in A_\alpha\}$ と定めると
w は (P) の (unique な) 最適解.

(pf) $\alpha<\beta \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha$ に注意する.
w の定義より $\alpha > w_i \Rightarrow i\notin A_\alpha$. $\therefore A_\alpha \subseteq \{w\geq\alpha\}$
一方, $\alpha < w_i \Rightarrow \exists\beta\in(\alpha, w_i)$ s.t. $i\in A_\beta$. $\therefore \{w>\alpha\}\subseteq A_\alpha$.
よって $A_\alpha = \{w\geq\alpha\}$ almost every α.
$\forall w'\in\mathbb{R}^V$ に対して, (β を十分小さくとると)

$$\hat{f}(w) + \frac{1}{2}\|w\|^2 = \int_0^\infty f(\{w\geq\alpha\})\,d\alpha + \int_\beta^0 [f(\{w\geq\alpha\}) - f(V)]\,d\alpha + \sum_{i=1}^n \left\{\int_\beta^{w_i} \alpha\,d\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right\}$$

$$= \mathrm{const.} + \int_\beta^\infty \Big[f(\underbrace{\{w\geq\alpha\}}_{=A^\alpha \text{ a.e.}}) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha\cdot \mathbb{1}_{w_i\geq\alpha}}_{=\alpha|A_\alpha|} \Big]\,d\alpha$$

$$\leq \mathrm{const.} + \int_\beta^\infty \Big[f(\{w'\geq\alpha\}) + \sum_{i=1}^n \alpha\cdot \mathbb{1}_{w_i'\geq\alpha} \Big]\,d\alpha \quad (\because A_\alpha \text{ は積分の中の minimizer})$$

$$= \hat{f}(w') + \frac{1}{2}\|w'\|^2$$

□

Cor w^* : (P) の (unique) 最適解
$\Longrightarrow \{w^*\geq\alpha\}$ は (SFM_α) の最適解. ← (P) を解くだけで (SFM_α) の全ての解が分かる.

Cor $\{w^*\geq 0\}$ は (SFM) 〃 .