

集合関数

モノの集まりに数値を対応させる関数

$$V = \{ \text{🍔} \text{ 🍟} \text{ 🍰} \text{ 🍰} \text{ 🍜} \text{ 🍷} \}$$

$$f(\text{🍔} \text{ 🍷}) = \begin{matrix} \text{価格} \\ \text{総カロリー} \\ \text{おいしさ(?)} \end{matrix}$$

16/55

劣モジュラ関数

限界効用逓減性 ... 手持ちの財が多くなると効用の増分が減る性質

$$\begin{aligned} f(\text{🍔} \text{ 🍟}) - f(\text{🍔}) \\ \geq \\ f(\text{🍔} \text{ 🍰} \text{ 🍰} \text{ 🍟}) - f(\text{🍔} \text{ 🍰} \text{ 🍰}) \end{aligned}$$

17/55

劣モジュラ関数

$f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ関数

$$\iff \forall X \subseteq \forall Y \subseteq V, \forall a \in V \setminus Y,$$

$$f(X \cup a) - f(X) \geq f(Y \cup a) - f(Y)$$

小さい集合の増分

大きい集合の増分

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$



18/55

V : 有限集合

Def $f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq V)$$

Prop f が劣モジュラ

$$\iff f(i|X) \geq f(i|Y) \quad (\forall X \subseteq Y, i \notin Y)$$

$$f(i|X) := f(X \cup i) - f(X)$$

増分

[限界効用逓減性 (diminishing return)]

$$\iff f(X+i) + f(X+j) - f(X) - f(X+i+j) \geq 0 \quad (\forall X, \forall i, j \notin X)$$

Prop f_1, f_2 : 劣モ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Prop f_1, f_2 : 劣モ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
 $\Rightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ も劣モ

例1 • $f(x) = |x|$

• $w \in \mathbb{R}^V$ に対して $f(x) = w(x) := \sum_{i \in x} w_i$

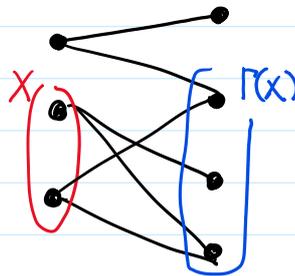
これはモジュラ関数: $f(x) + f(y) = f(x \cup y) + f(x \cap y)$

例2 $G = (U, V; E) \dots$ 2部グラフ

$X \subseteq U$ に対して $\Gamma(X) = \{v \in V : \exists u \in X, uv \in E\}$

$f(x) = |\Gamma(x)|$

(被覆関数, coverage func.)



例3 $G = (V, E) \dots$ グラフ, $w \in \mathbb{R}_+^E$

$f(x) := \sum w_e$

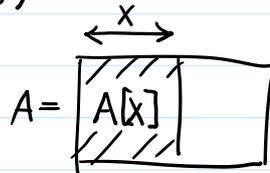
$e = \{i, j\} \in E : |i, j \cap x| = 1$

(カット関数; cut func.)

例4 $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \dots$ 行列, $V = [n]$

$f(x) = \text{rank } A[x]$

(線形マトロイドのランク関数)



例5 $V = [n], S_1, \dots, S_n$: 確率変数

• $f(x) = H(S_i : i \in x)$

H : Shannon / 微分エントロピー

• $f(x) = I(X; \bar{X})$

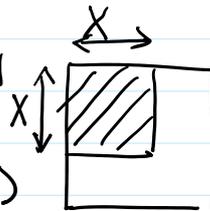
I : 相互情報量

$= H(X) + H(\bar{X}) - H(X \cup \bar{X})$

例6 $V = [n], A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 半正定値対称行列

$f(x) = \log \det A[x, x]$

(実は上の entropy の特殊ケース)



例7 $G = (V, E), p_e \in [0, 1] (e \in E)$

以下のプロセスを考える. $X \subseteq V$ を固定.

時刻 0 : X の頂点が活性化する.

時刻 t : 時刻 $t-1$ で活性化した頂点 v に対し

v から出る各枝 e でつながっている 活性頂点 u

を確率 p_e で活性化する

$f(x) := \mathbb{E}[\#(t = |V| + 1 \text{ で} \text{ 活性化している頂点})]$

\dots □ のモデル
(influence func.)