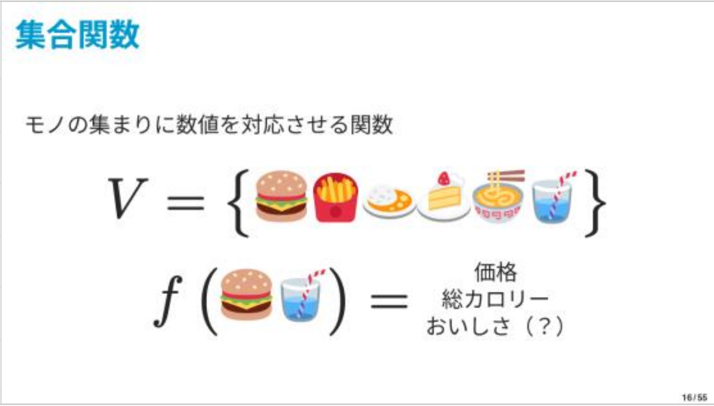
劣モジュラ関数の例

2019年2月1日 12:22



V: 有限集合

Def $f: 2^V \longrightarrow \mathbb{R}$ が 劣モジュラ

$$\iff f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad ({}^\forall X, Y \subseteq V)$$

Prop f が劣モジュラ

$$\iff f(i|X) \geq f(i|Y) \quad ({}^\forall X \subseteq {}^\forall Y, {}^\forall i \notin Y)$$

$f(i|X) := f(X \cup i) - f(X)$

増分

[限界効用逓減性 (diminishing return)]

$$\iff f(X+i) + f(X+j) - f(X) - f(X+i+j) \geq 0$$
$$({}^\forall X, {}^\forall i, j \notin X)$$

Prop f_1, f_2 : 劣モ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Prop f_1, f_2 : 劣モ, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ も劣モ

例1 • $f(X) = |X|$

• $w \in \mathbb{R}^V$ に対して $f(X) = w(X) := \sum_{i \in X} w_i$

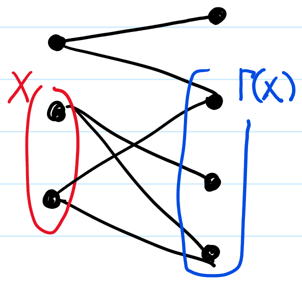
これらはモジュラ関数: $f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

例2 $G = (U, V; E)$ … 2部グラフ

$X \subseteq U$ に対して $\Gamma(X) = \{ v \in V : {}^{\exists} u \in U,\ uv \in E \}$

$f(X) = |\Gamma(X)|$

(被覆関数, coverage func)



例3 $G = (V, E)$ … グラフ, $w \in \mathbb{R}_+^E$

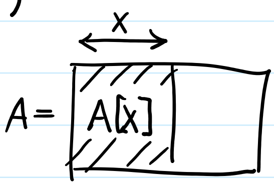
$$f(X) := \sum_{e=\{i,j\} \in E : |\{i,j\} \cap X| = 1} w_e$$

(カット関数; cut func)

例4 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ … 行列, $V = [n]$

$f(X) = \mathrm{rank}\, A[X]$

(線形マトロイドのランク関数)



例5 $V = [n]$, $S_1, \cdots, S_n$: 確率変数

• $f(X) = H(S_i : i \in X)$ H: Shannon / 微分エントロピー

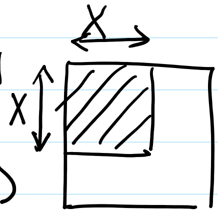
• $f(X) = I(X ; \bar{X})$ I: 相互情報量

$:= H(X) + H(\bar{X}) - H(X \cup \bar{X})$

例6 $V = [n]$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 半正定値対称行列

$f(X) = \log\det A[X, X]$

(実は上の entropy の特種ケース)



例7 $G = (V, E)$, $p_e \in [0, 1]$ $(e \in E)$

以下のプロセスを考える. $X \subseteq V$ を固定.

時刻 0 : X の頂点が活性化する.

時刻 t : 時刻 $t-1$ で活性化した頂点 v に対し v から出る各枝 e でつながっている 活性頂点 u を確率 p_e で活性化する

$f(X) := \mathbb{E}[\#(t = |V| + 1$ で活性化している頂点$)]$ … 口コミのモデル (influence func)