

$G = (V, E; w)$: 重み付き無向グラフ, 連結, 単純

$w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$: 正の枝重み

$i \in V$ に対し $e_i \in \mathbb{R}^V$ を $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_i$ とする.

Def グラフラプラシアン

$$L_G = \sum_{e=ij \in E} w(e)(e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$$

Prop • L_G は 半正定値対称 $V \times V$ 行列

• $S \subseteq V$ に対し $\mathbf{1}_S^T L_G \mathbf{1}_S = w(E[S, \bar{S}])$

• $L_G \mathbf{1} = \mathbf{0}$

• G 連結 $\Rightarrow \ker L_G = \langle \mathbf{1} \rangle$

$$\Rightarrow \text{rank } L_G = n - 1 \quad (n = |V|)$$

① • $\forall x \in \mathbb{R}^V$ に対し $x^T L_G x = \sum_{e=ij \in E} w(e)(x_i - x_j)^2 \geq 0$

• $x = \mathbf{1}_S$ を代入すると $\mathbf{1}_S^T L_G \mathbf{1}_S = \sum_{e \in E[S, \bar{S}]} w(e) = w(E[S, \bar{S}])$

• $(e_i - e_j)^T \mathbf{1} = 1 - 1 = 0$ より 明らか

• $x \in \ker L_G$ とすると $0 = x^T L_G x = \sum_{e=ij \in E} w(e)(x_i - x_j)^2$

$\therefore x_i = x_j \quad (\forall ij \in E)$, 連結性より $x_i = x_j \quad (\forall i, j \in V)$. $\square$

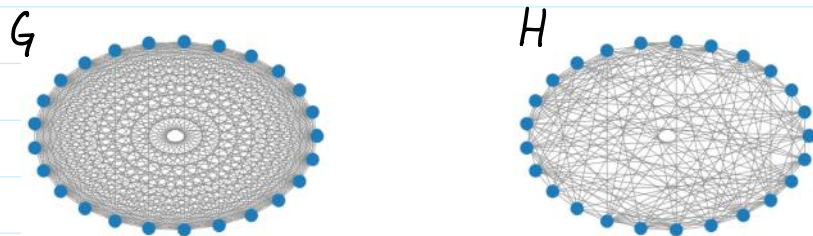
記号 $A \succeq B \stackrel{\Delta}{\iff} A - B \succeq 0$ (Löwner 順序)

Def $w': E \rightarrow \mathbb{R}_+$ (非負), $\text{supp}(w') \subseteq \text{supp}(w)$ に対し
 $H = (V, E; w')$ を G の 重み付き部分グラフ という.

重み $w'(e) = 0$ の枝 e は削除された枝. H の枝数 $= |\text{supp}(w')|$

$0 < \varepsilon < 1$: パラメータ

Def G の重み付き部分グラフ $H = (V, E; w')$ が G の ε スペクトル疎化
(ε -spectral sparsifier) である $\Leftrightarrow (1-\varepsilon)L_G \leq L_H \leq (1+\varepsilon)L_G$



H が G の ε スペクトル疎化

$$\Rightarrow (1-\varepsilon)w(E[S, \bar{S}]) \leq w'(E[S, \bar{S}]) \leq (1+\varepsilon)w(E[S, \bar{S}])$$

... G と H でカットの値は $(1+\varepsilon)$ 倍以内に入る

Thm (Spielman - Srivastava 2008) $|\text{supp}(w')| = O(\frac{1}{\varepsilon^2} n \log n)$ となる
 ε スペクトル疎化 H を高確率で求める乱択アルゴリズムが存在.

G が密グラフ ($m = \Theta(n^2)$) でも $O(n \log n)$ まで枝数を減らせる!

実効抵抗

$$L_G \text{ のスペクトル分解を } L_G = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^T \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} > 0 \\ P: \text{直交行列} \end{array} \right)$$

とする. L_G の Moore-Penrose 逆行列は

$$L_G^+ = P \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1}^{-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^T$$

で与えられる.

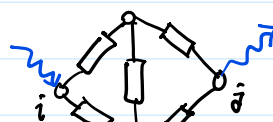
$$L_G L_G^+ = L_G^+ L_G = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^T.$$

$$\bullet \text{tr}[L_G^+ L_G] = n-1$$

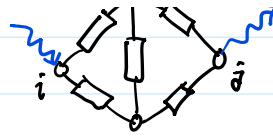
Def $i, j \in V$ に対し $i-j$ 間の 実効抵抗 (effective resistance):

$$R(i, j) = \text{tr}[L_G^+ (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T]$$

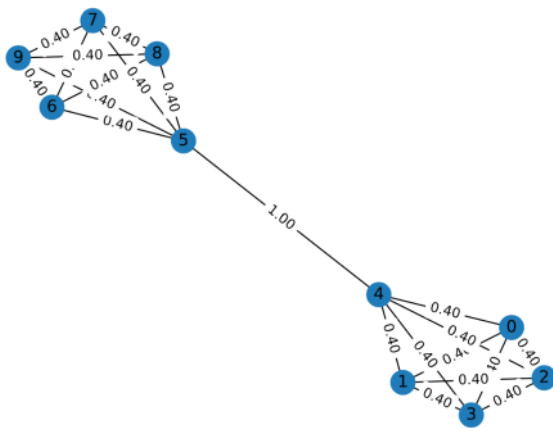
物理的意味 各枝を $\frac{1}{w(e)}$ Ω の抵抗と見なして
グラフを電気回路だと思う. i に電位 $+1$,



物理的意味 各辺に $w(e)$ の抵抗を元として
 グラフを電気回路だと思ふ。 i に電位 $+1$,
 j に -1 をかけたときのグラフ全体の抵抗
 値が $R(i, j)$.



例)



($w \equiv 1$ とした)

Fact 実効抵抗 $R(i, j)$ は $\tilde{O}(m)$ 時間で計算できる
 ($L_G x = b$ の $\tilde{O}(m)$ 時間解法; ラプラシアンソルバーを用いる)

- $R(i, j) > 0$ ($i \neq j$)

⊙ $R(i, j) = (e_i - e_j)^T L_G^+ (e_i - e_j)$

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

$L_G^+ \succeq 0$ から $e_i - e_j \perp \mathbb{1}$ より 右辺 > 0

枝 $e = ij \in E$ に対し $R(e) := R(i, j)$ と書く.

$p_e := w(e) R(e)$ とする (leverage score)

Lem $0 < p_e \leq 1$

いくつか準備とする.

$$L_G^{+1/2} := P \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1}^{-1/2} \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^T \quad \text{とする.}$$

$$(L_G^{+1/2})^2 = L_G^+, \quad L_G^{+1/2} L_G L_G^{+1/2} = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^T =: \Pi$$

$$x_e := L_G^{+1/2} (e_i - e_j) \quad \text{とする.}$$

- $\|x_e\|^2 = R(e)$

⊙ 左辺 $= x_e^T x_e = (L_G^{+1/2} (e_i - e_j))^T (\quad) = (e_i - e_j)^T (L_G^{+1/2})^2 (e_i - e_j) = \text{右辺} \quad \square$

$$\begin{aligned}
 (\text{pf of Lem}) \quad \sum_e w(e) x_e x_e^T &= L_G^{+1/2} \sum_e w(e) (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T L_G^{+1/2} \\
 &= L_G^{+1/2} L_G L_G^{+1/2} = \Pi
 \end{aligned}$$

$$\therefore w(e) x_e x_e^T \preceq \Pi$$

$$\begin{aligned}
 x_e x_e^T \text{ は rank-1 半正定値 なる } \therefore \text{tr}(w(e) x_e x_e^T) &= \lambda_{\max}(\text{"}) \leq \lambda_{\max}(\Pi) = 1 \\
 \parallel & \\
 w(e) \|x_e\|^2 &= p_e \quad \square
 \end{aligned}$$

$$\text{Lem (Foster)} \quad \sum_{e \in E} p_e = n - 1$$

$$\begin{aligned}
 (\text{pf}) \quad \sum_{e \in E} w(e) R(e) &= \sum_{e=ij \in E} w(e) \text{tr} \left[L_G^+ (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \right] \\
 &= \text{tr} \left[L_G^+ \sum_{e=ij \in E} w(e) (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \right] \\
 &= \text{tr} [L_G^+ L_G] = n - 1. \quad \square
 \end{aligned}$$

枝サンプリングアルゴリズム

$c \geq 6$: パラメータ

1: $K := c \varepsilon^{-2} \log n$ とする.

2: $(Z_{k,e})_{k \in [K], e \in E}$ と $Z_{k,e} = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } p_e \\ 0 & \text{w.p. } 1 - p_e \end{cases}$ なる独立確率変数 とする

3: $w' : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ と $w'(e) = \frac{Z_{1,e} + \dots + Z_{K,e}}{K} w(e)$ とする.

Thm $H = (V, E; w')$ は確率 $1 - O(\frac{1}{n})$ 以上で ε スペクトル疎化 かつ

$$|\text{supp}(w')| = O\left(\frac{n}{\varepsilon^2} \log n\right).$$

$$\boxed{|\text{supp}(w')| \text{ の解析}} \quad |\text{supp}(w')| \leq \sum_k \sum_e Z_{k,e} \quad \text{に注意して}$$

$$\mathbb{E}[|\text{supp}(w')|] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K \sum_{e \in E} Z_{k,e}\right] = K \sum_{e \in E} p_e = K(n-1)$$

$$\therefore \mathbb{E}[|\text{supp}(w')|] \leq c \varepsilon^{-2} (n-1) \log n$$

高確率で $|\text{supp}(w')| = O\left(\frac{n}{\varepsilon^2} \log n\right)$ を示すには 集中不等式 を用いる.

$$\begin{aligned}
 (\text{Chernoff bound}) \quad X &= X_1 + \dots + X_m, \\
 X_i &= \begin{cases} 1 & \text{w.p. } p_i \\ 0 & \text{w.p. } 1-p_i \end{cases}, \quad X_i \text{ たちは独立} \\
 \mu &:= \mathbb{E}[X] \\
 \Rightarrow \Pr(X > (1+\delta)\mu) &\leq \exp\left(-\frac{\delta^2 \mu}{2+\delta}\right) \quad (\forall \delta \geq 0)
 \end{aligned}$$

これを $Z_{k,e}$ たちに用いる. $\mu = \mathbb{E}[X] = K(n-1)$

$$\delta := 1 \quad \text{とすると} \quad \text{右辺} = \exp\left(-\frac{K}{3}(n-1)\right) \leq \exp\left(-\frac{c}{3}(n-1)\right) \quad \textcircled{1} \quad K = c\varepsilon^{-2} \log n \geq c$$

$$\therefore \Pr(|\text{supp}(w')| > 2\mu) \leq \Pr(X > 2\mu) \leq \exp\left(-\frac{c}{3}(n-1)\right)$$

ε スペクトル疎化であること

$$\begin{aligned}
 \text{示したいこと: } (1-\varepsilon)L_G &\preceq L_H \preceq (1+\varepsilon)L_G \\
 \Leftrightarrow (1-\varepsilon)L_G^{\frac{1}{2}} L_G L_G^{\frac{1}{2}} &\preceq L_G^{\frac{1}{2}} L_H L_G^{\frac{1}{2}} \preceq (1+\varepsilon)L_G^{\frac{1}{2}} L_G L_G^{\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\Pi &\preceq L_G^{\frac{1}{2}} L_H L_G^{\frac{1}{2}} \preceq (1+\varepsilon)\Pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_G^{\frac{1}{2}} L_H L_G^{\frac{1}{2}} &= L_G^{\frac{1}{2}} \left[\sum_k \sum_e \frac{Z_{k,e}}{K p_e} w(e) (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \right] L_G^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_k \sum_e \frac{Z_{k,e}}{K p_e} w(e) \mathbf{x}_e \mathbf{x}_e^T \quad (\mathbf{x}_e = L_G^{\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j))
 \end{aligned}$$

このランダム行列 X の“固有値”が $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ に入ればよい.

正確に言うと X も Π も $\mathbf{I}$ が $\ker$ の共通する元なので それと直交する方向に全体を制限した上での固有値.

(行列 Chernoff bound) $X = X_1 + \dots + X_m$
 X_i : $n \times n$ 対称 (ランダム) 行列, $0 \preceq X_i \preceq R \cdot I$ a.s.
 X_i たちは独立
 $\mu_{\min} \cdot I \preceq \mathbb{E}[X] \preceq \mu_{\max} \cdot I$

$$\Rightarrow \Pr\left(\lambda_{\min}(X) \leq (1-\delta)\mu_{\min}\right) \leq n \cdot \exp\left(-\frac{\mu_{\min} \delta^2}{2R}\right) \quad (0 < \delta < 1)$$

$$\Pr\left(\lambda_{\max}(X) \geq (1+\delta)\mu_{\max}\right) \leq n \cdot \exp\left(-\frac{\mu_{\max} \delta^2}{2R}\right) \quad (\text{ " })$$

$X_{k,e} := \frac{Z_{k,e}}{K p_e} w(e) x_e x_e^T \quad \left(\begin{matrix} k \in [K] \\ e \in E \end{matrix} \right)$ たちに 行列 Chernoff bound を使う。

• $\mathbb{E}[X] = K \sum_{e \in E} \underbrace{\mathbb{E}[Z_{k,e}]}_{= p_e} \frac{w(e)}{K p_e} x_e x_e^T = \sum_{e \in E} w(e) x_e x_e^T = \Pi$
 $\therefore \mu_{\max} = \mu_{\min} = 1$

• $X_{k,e} \preceq R \cdot I$ なる $R > 0$ を求める。つまり $\lambda_{\max}$ の上界を求める。

$X_{k,e}$ は rank-1 半正定値行列 なのよ

$$\lambda_{\max}(X_{k,e}) = \text{tr}[X_{k,e}] = \begin{cases} 0 & \text{if } Z_{k,e} = 0 \\ \frac{w(e)}{K p_e} \text{tr}[x_e x_e^T] & \text{if } Z_{k,e} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{w(e)}{K p_e} \text{tr}[x_e x_e^T] = \frac{x_e^T x_e}{K R(e)} = \frac{1}{K} \quad \odot \quad R(e) = \|x_e\|^2$$

$$\therefore R = \frac{1}{c \varepsilon^{-2} \log n}$$

これらと $\delta := \varepsilon$ を代入すると

$$\Pr\left(\lambda_{\min}(X) \leq 1-\varepsilon\right) \leq n \cdot \exp\left(-\frac{c \varepsilon^{-2} \log n \cdot \varepsilon^2}{2}\right) = \frac{1}{n^{c/2-1}}$$

$$\Pr\left(\lambda_{\max}(X) \geq 1+\varepsilon\right) \leq \frac{1}{n^{c/3-1}}$$

$c \geq 6$ より どちらも $\frac{1}{n}$ で抑えられる。

以上より 確率 $1 - \frac{2}{n}$ 以上で $(1-\varepsilon)L_G \preceq L_H \preceq (1+\varepsilon)L_G$ が成立。

補足

- 実は枝数 $O(\varepsilon^{-2}n)$ の ε スペクトル疎化 も存在.
(**linear-sized spectral sparsifier**, Baston-Spielman-Srivastava'14)
- スペクトル疎化は ハイパーグラフ にも拡張可能 (相馬-吉田'19)

参考文献

- Joel Tropp. "An Introduction to Matrix Concentration Inequalities" (2015)
... 行列 Chernoff bound の証明
- 吉田 悠一 『スペクトルグラフ理論 線形代数からの理解を目指して』 (2024)
... ラプラシアンソルバーなどラプラシアン全般が詳しい